Grundlagenfach Mathematik 4. Gym

Teil 2: Quadratische Funktionen (qu. Fus.)

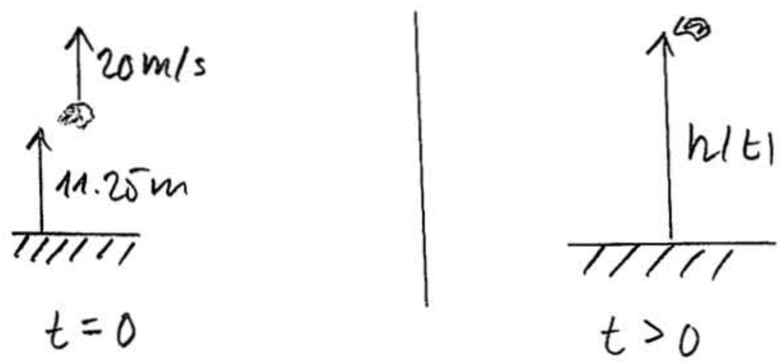
U. Aeberhard

Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen

Einführungsbeispiel

Ein Stein wird aus der Höhe 11.25 m mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s senkrecht nach oben geworfen.



Für die Höhe des Steins t Sekunden nach Abwurf gilt (~ freier Fall, Physik)

$$\underline{h(t) = -5 \cdot t^2 + 20\,t + 11.25} \qquad \text{(in Meter)}$$

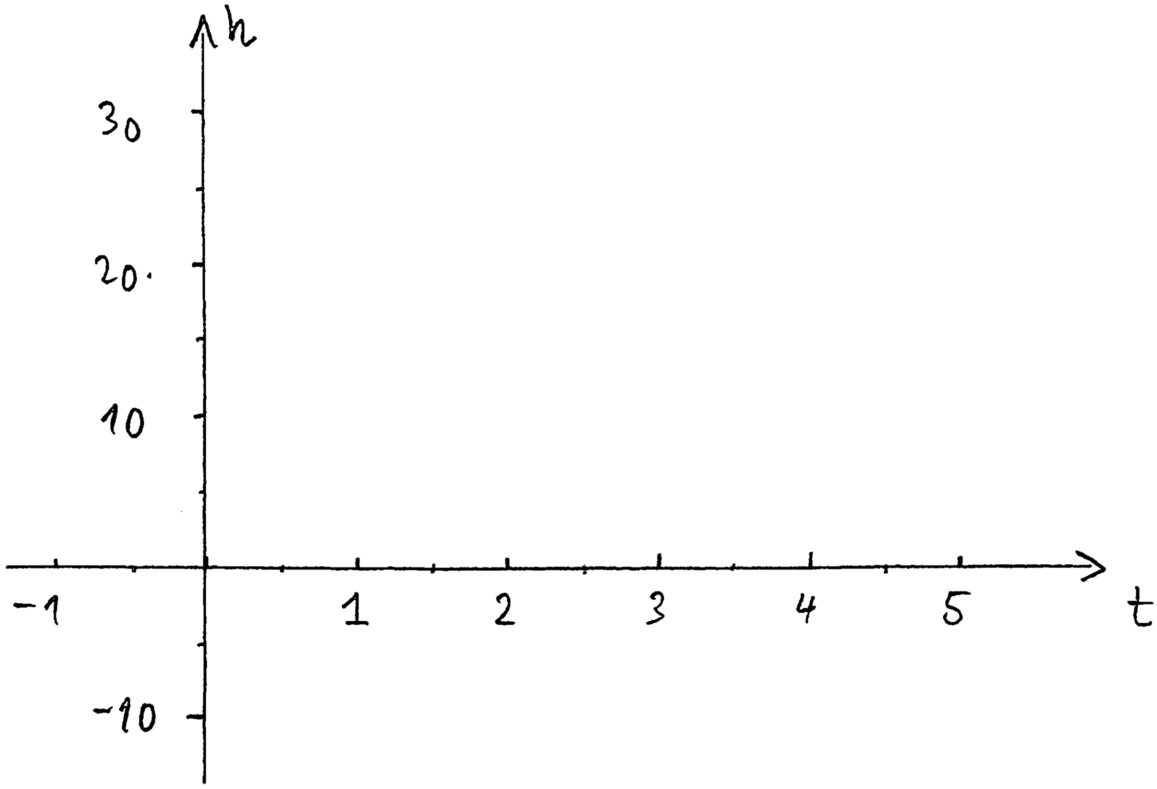
Gib den zeitlichen Verlauf der Höhe h(t)

- in einer Wertetabelle, und
- als Funktionsgraph an!

Wertetabelle

t	-1	0	1	2	3	4	5
$h(t)$							

Funktionsgraph



Exkurs: Evaluationsmethoden qu. Funktionen

Geg: $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ GF

Ges: $f(0), f(1), f(2), \ldots$

Methode 1: Horner-Schema:

1) Schreibe die drei Koeffizienten der GF geordnet in eine Zeile:

$$3 \quad -2 \quad 1$$

2) Schreibe die Stelle x, für die du f(x) auswerten willst, in die 2. Zeile, links, Bsp $x = 2$:

$$\begin{array}{l|ccc|l}
 & 3 & -2 & 1 & \text{1. Zeile} \\
2 & & & & \text{2. Zeile} \\
\hline
 & & & & \text{3. Zeile}
\end{array}$$

3) Berechne die Einträge in der 2./3. Zeile folgendermassen: Zick-zack, startend beim 1. Koeffizienten (3)

- nach unten addieren (→ 3 Zeile)
- nach oben-rechts: mal 2 (→ 2. Zeile)

	3	-2	1
2	+0	6 +	8 +
	3 ·2	4 ·2	9 = f(2)

Resultat: $\underline{\underline{f(2) = 9}}$

Methode 2: Matlab / Octave:

Du möchtest folgende Wertetabelle erstellen (z.B)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

1. Starte Octave-Online:

```
https://octave-online.net/
```

2. dann im Command-Prompt folgende drei Zeilen eingeben (jeweils mit ENTER abschliessen):

```
x=(-3:3)
f=@(x) 3*x.^2 - 2*x + 1
[x;f(x)]
```

3. Dies liefert die gewünschte Wertetabelle:

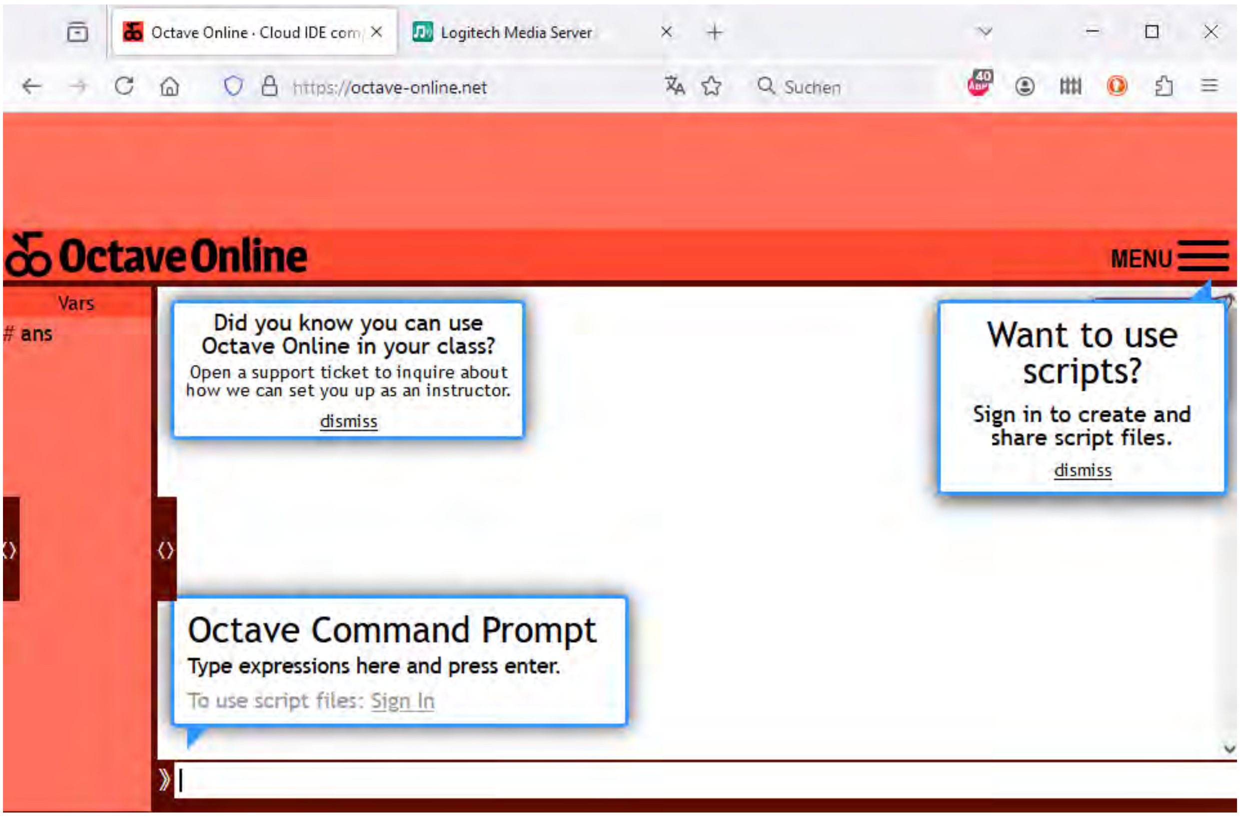
```
ans =

   -3   -2   -1    0    1    2    3
   34   17    6    1    2    9   22
```

Wertetabellen von quadratischen Funktionen mittels Matlab/Octave erstellen

Im Browser:

https://octave-online.net/

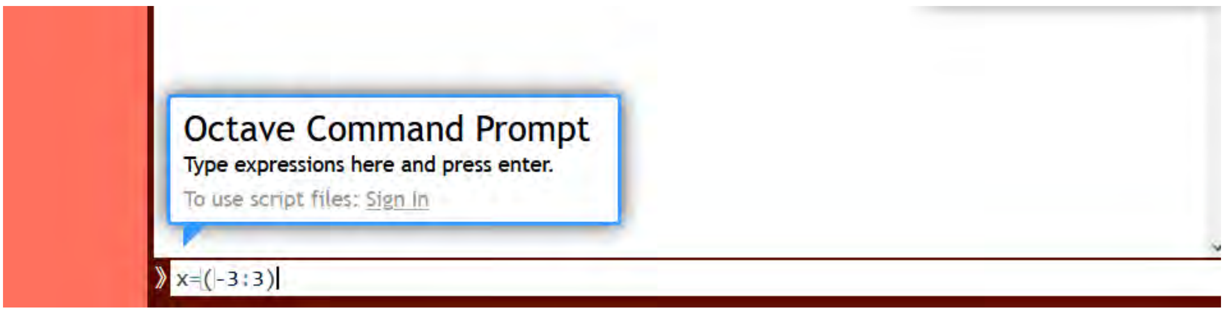
Dies liefert, nach ein paar Bestätigungs- und Cookie-Klicks:



Eingabe von

```
x=(-3:3)
```

im Command Prompt:



Dann ENTER-Taste:

```
octave:1> x=(-3:3)
x =

  -3  -2  -1   0   1   2   3

»|
```

Das Resultat (Ans, x) ist eine Zeile mit den Stellen der gewünschten Wertetabelle:

```
-3   -2   -1    0    1    2    3
```

Weitere Eingabe im Command-Prompt:

```
f=@(x)  3*x.^2 - 2*x + 1
```

mit ENTER-Taste abschliessen. Dies deklariert die Funktion $f(x)$ zu

$3x^2 - 2x + 1$

```
octave:2> f=@(x) 3*x.^2 - 2*x + 1
f =

@(x) 3 * x .^ 2 - 2 * x + 1
```

Letzter Schritt: Erstellen der Wertetabelle. Eingabe von

```
[x;f(x)]
```

im Command-Prompt, ebenfalls mit ENTER abschliessen:

```
octave:3> [x;f(x)]
ans =

   -3   -2   -1    0    1    2    3
   34   17    6    1    2    9   22
```

Wir erhalten die gewünschten zwei Zeilen der Wertetabelle. In der ersten Zeile die Stellen, in der zweiten Zeile die zugehörigen Werte.

Definition (quadratische Funktion) Grundform GF

Eine reellwertige Funktion, deren Funktionsterm durch Termumformung in die sog. Grundform (GF)

$$f(x) = \qquad\qquad , \qquad (GF)$$

gebracht werden kann, heisst quadratische Funktion

x ist die Funktionsvariable, a, b, c sind gegebene Koeffizienten:

a: quadratische Koeffizient, Leitkoeffizient
b: linearer Koeffizient
c: konstanter Koeffizient

Die Bedingung garantiert, dass eine quadratische Fn. vorliegt. (wäre , so wäre die Funktion).

Beispiele

1) $f(x) = x - 3 + x^2$ $\quad$ a =

$=$ $\quad$ b =

c =

2) $f(x) = 3\cdot(x^2+2)$

$=$

$\Big\}$ $a =$
$b =$
$c =$

3) $f(x) = 2(x-2)^3 - 2x^3$

$=$

$a =$ $b =$ $c =$

4) $f(x) = (x-1)^2$

$=$

$\Big\}$ $a =$
$b =$
$c =$

5) $f(x) = x^2$

$=$

$\Big\}$ $a =$
$b =$
$c =$

Auftrag quadratische Funktionen

Zeichne den Graphen mithilfe von Matlab/Octave.

Beschreibe den Graphen, benenne die Eigenschaften.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$
b) $g(x) = 2 - x^2$
c) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$
d) $k(x) = -x^2 + 4x$
e) $m(x) = (x - 2)^2 + 1$

```
https://octave-online.net/
clear all; close all; clc
x = linspace(-4,6);
y = 2*x.^2 + 4*x + 1;
plot(x,y);
grid;
xlabel('x');
ylabel('y');
title("f(x) = 2x^2 + 4x + 1")
```

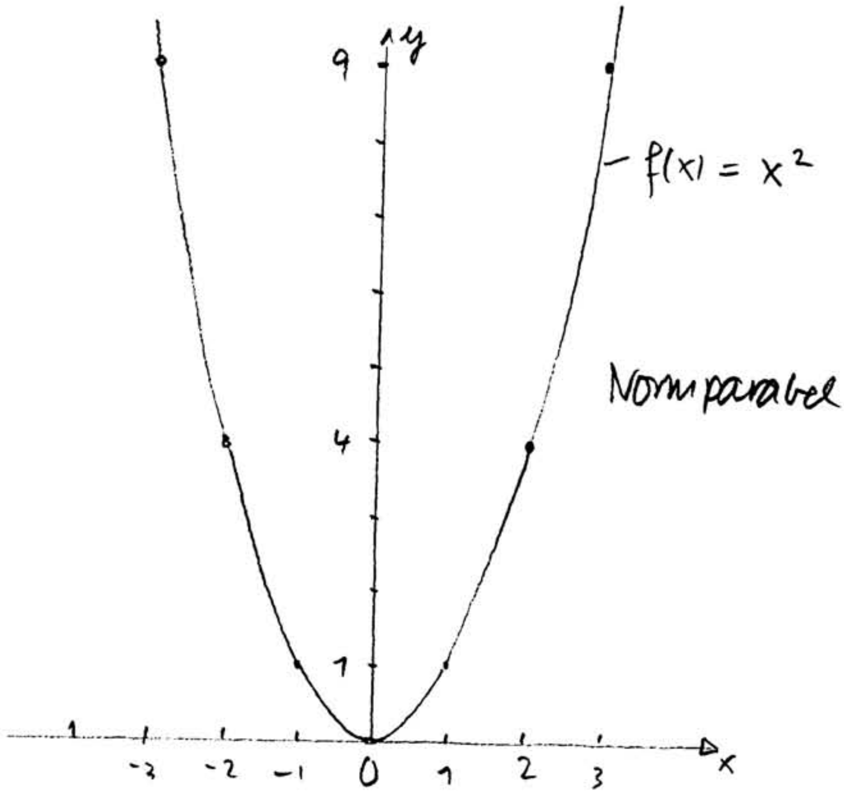
Erkenntnis:

Die Normparabel

Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ $(a=1, b=0, c=0)$

heisst Normparabel:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$f(x)$										…

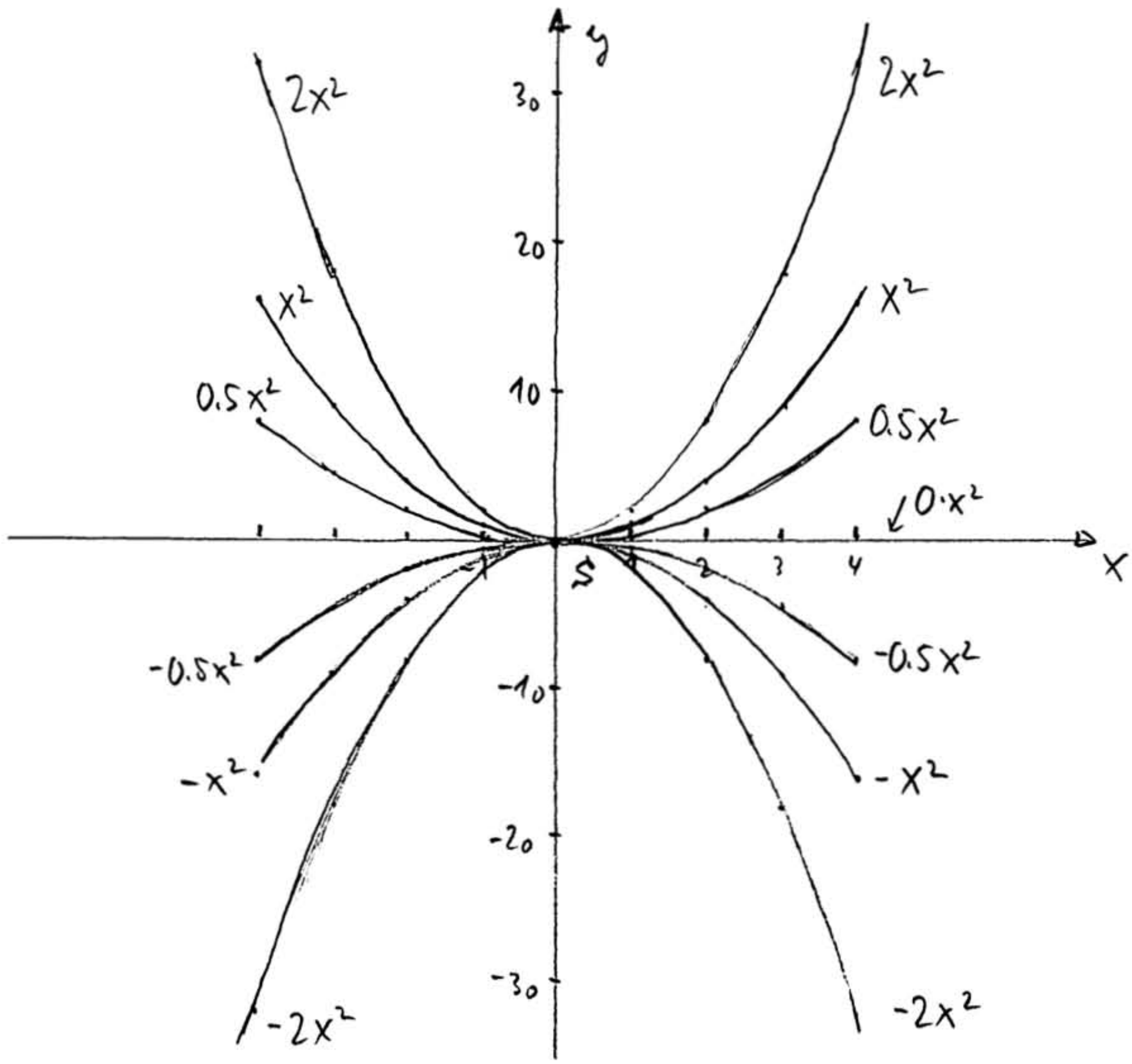


Eigenschaften:

Die gestreckte / gestauchte / gespiegelte Normparabel

Wir betrachten für $a \neq 0$ die Funktion $f(x) = a \cdot x^2$

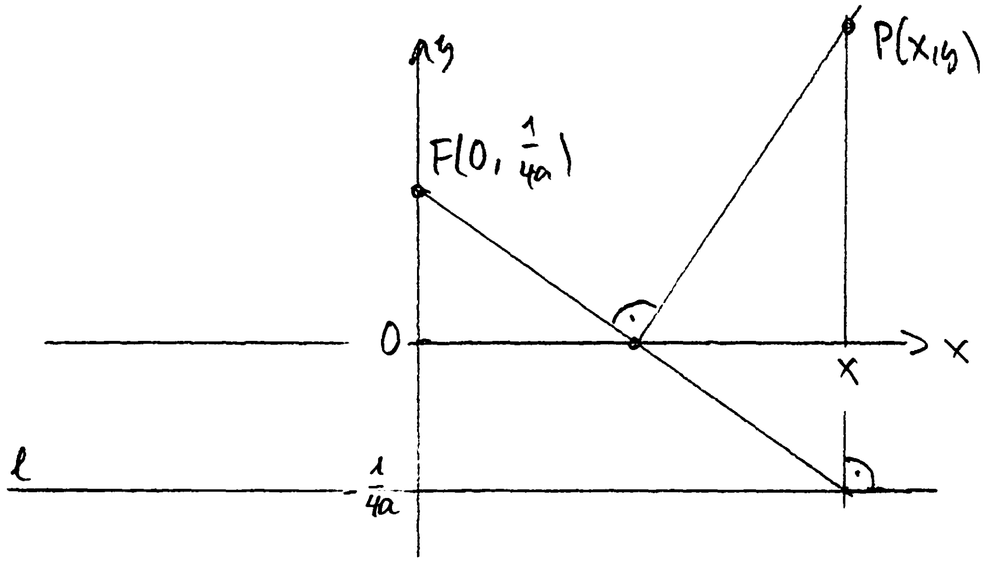
	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$a = 2$:	$2x^2$	32	18	8	2	0	2	8	18	32
$a = 1$:	$1x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$a = 0.5$:	$0.5x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8
$a \to 0$:	$0 \cdot x^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a = -0.5$:	$-0.5x^2$	-8	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	-8
$a = -1$:	$-1x^2$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16
$a = -2$:	$-2x^2$	-32	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32



Eigenschaften $f(x) = a \cdot x^2$

- $a = f(\ \ )$
- spiegelsymmetrisch, Symmetrieachse:
- Scheitelpunkt:
- $|a|$ ist ein Mass für:
- $sgn(a)$ bestimmt die

<u>Auftrag</u> : $F(0, \frac{1}{4a})$, $\ell : y = -\frac{1}{4a}$ gem. Zeichnung.



1) Zeige: P(x,y) liegt auf einer gestrechen Normparabel. Gib dafür einen Formelausdruck für y an.

2) Skizziere die Parabel indem du die Konstruktion für verschiedene Werte x durchführst.

3) Gib eine Abstandsbedingung für alle Punkte P(x,y) auf der Parabel an.

Die Starttangente, geom. Einfluss von a, b, c

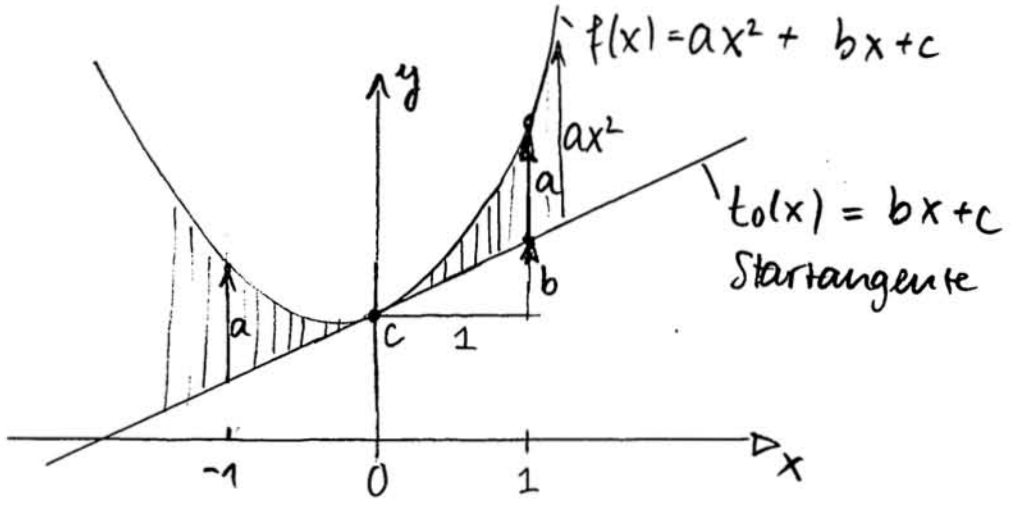
Wir stellen $f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$

als **Superposition** (Überlagerung) dar

- ax^2 (gestreckte/gestauchte/gespiegelte Normparabel)
- $t_0(x) = bx + c$ (Starttangente, lin. Fu.: Steigung b, Startwert c)

Durch das superponieren der beiden Funktionen entsteht $f(x) = ax^2 + t_0(x)$.

Dabei gilt, dass der Graph von $f(x)$ den Graphen von $t_0(x)$ bei $x = 0$ **berührt** (Tangente):

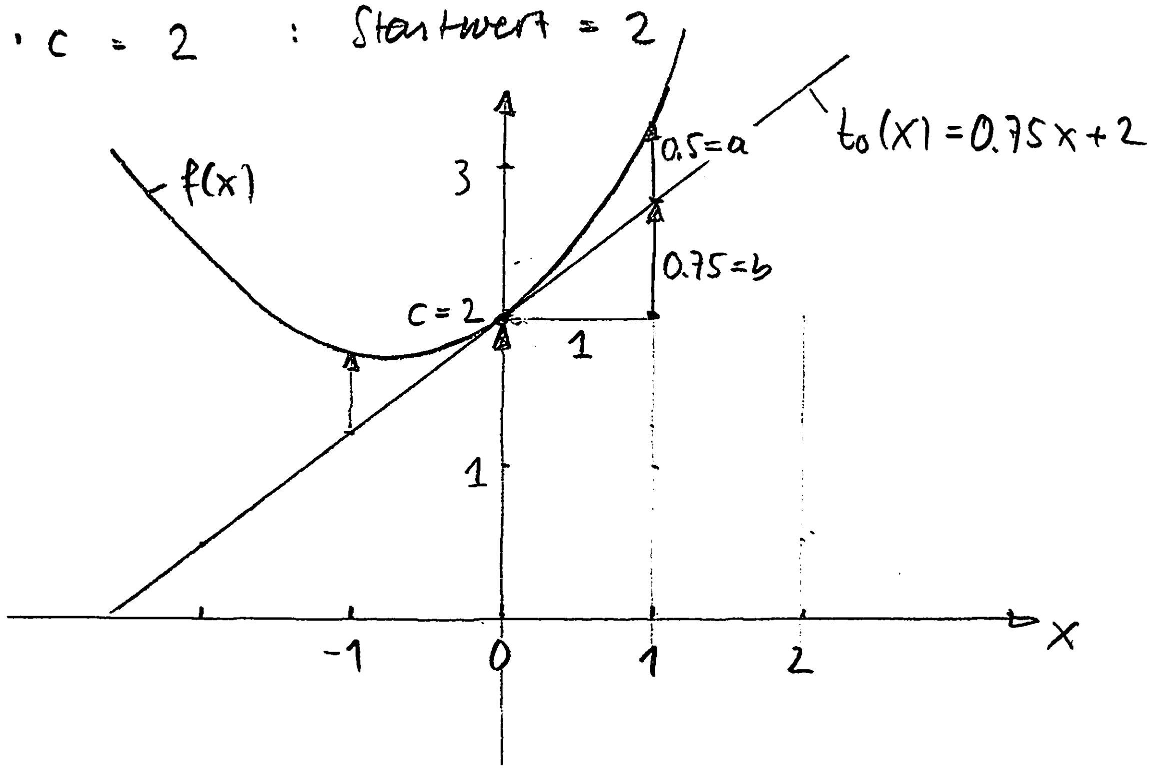


Daraus ergeben sich die Einflüsse der Koeffizienten a, b, c der GF auf den Graphen:

$a \sim$
$b =$
$c =$

Beispiel: $f(x) = 0.5x^2 + 0.75x + 2$

- $a = +0.5$: flacher als Normparabel geöffnet, nach oben geöffnet
- $b = 0.75$: Startsteigung $= 0.75$
- $c = 2$: Startwert $= 2$



Damit kann die Form, Öffnung und Lage der Parabel grob abgeschätzt werden.

Aufgabe Einfluss der GF-Koeffizienten a,b,c auf Graphen

Skizziere den Graphen der qu. Fn. f(x) aufgrund der geometrischen Bedeutung der Koeffizienten a, b und c der Grundform.

a) $f(x) = x^2 - 0{,}5x + 1$

b) $f(x) = -0.5x^2 - x + 2$

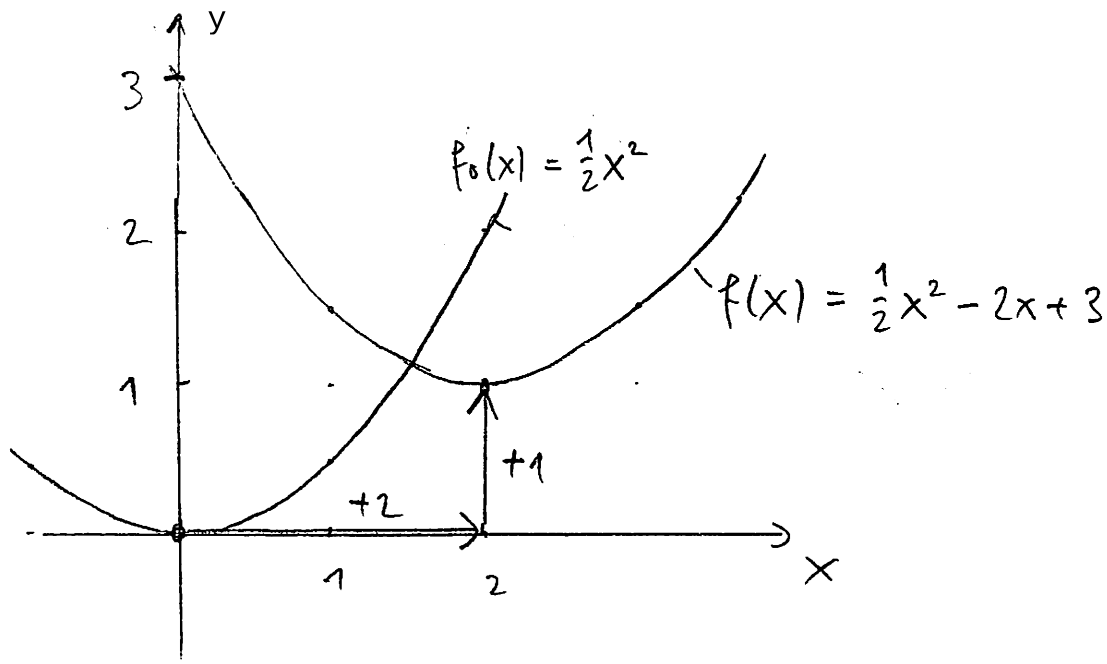
c) $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 2$

d) $f(x) = 0{,}5x^2 + x + 1$

Die Scheitelform (SF) quadr. Fns.

Der Funktionsgraph einer beliebigen qu. Fn. lässt sich durch <u>Verschieben</u> einer Parabel $a \cdot x^2$, also einer gestreckten, gestauchten und oder gespiegelten Normparabel bilden:

Bsp:



Wir wollen diesen Zusammenhang in diesem Abschnitt genauer studieren.

1. Funktionsgraphen verschieben

a) Sei $f_0(x) := |x|$, $f_1(x) := f_0(x) + 1$

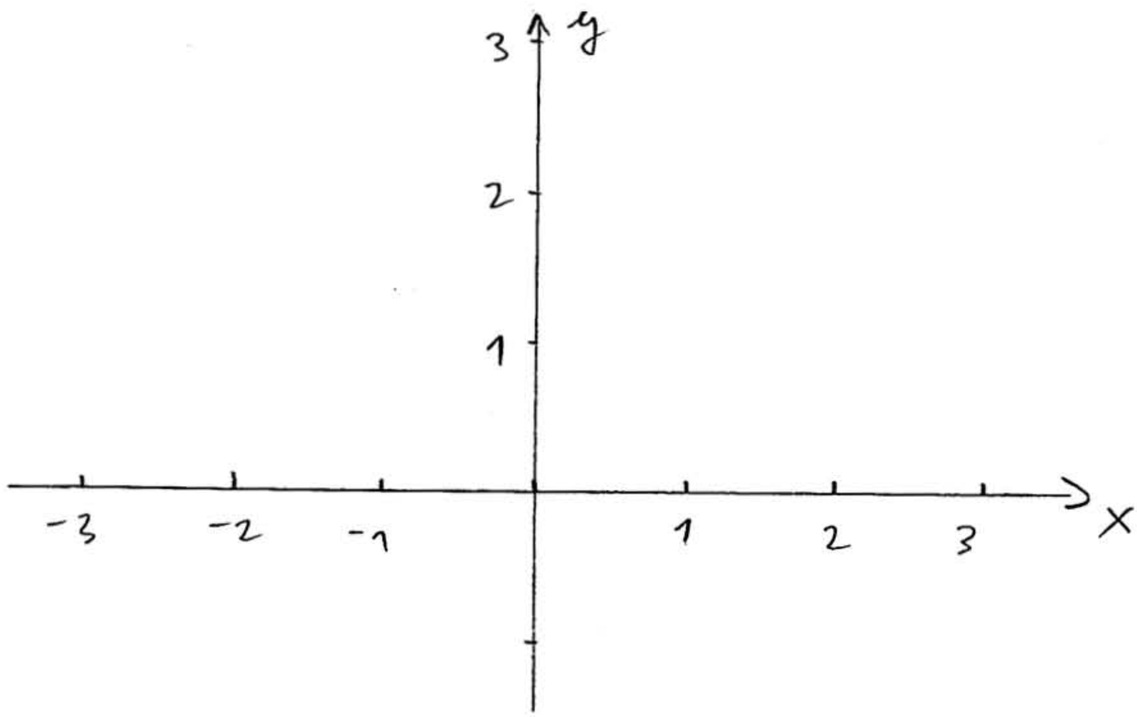
$$f_2(x) := f_0(x) + 2$$

$$f_{-1}(x) := f_0(x) - 1$$

Erstelle für die vier Fns f_{-1}, f_0, f_1, f_2 Wertetabellen

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_{-1}(x)$							
$f_0(x)$							
$f_1(x)$							
$f_2(x)$							

Skizziere die Funktionsgraphen von f_{-1}, f_0, f_1, f_2



Für $r = -1, 1, 2$: Beschreibe den geometrischen Zusammenhang zwischen dem Graphen von $f_0(x)$ und von $f_r(x)$.

b) Seien nun $f_0(x) := |x|$, $f_1(x) := f_0(x-1)$

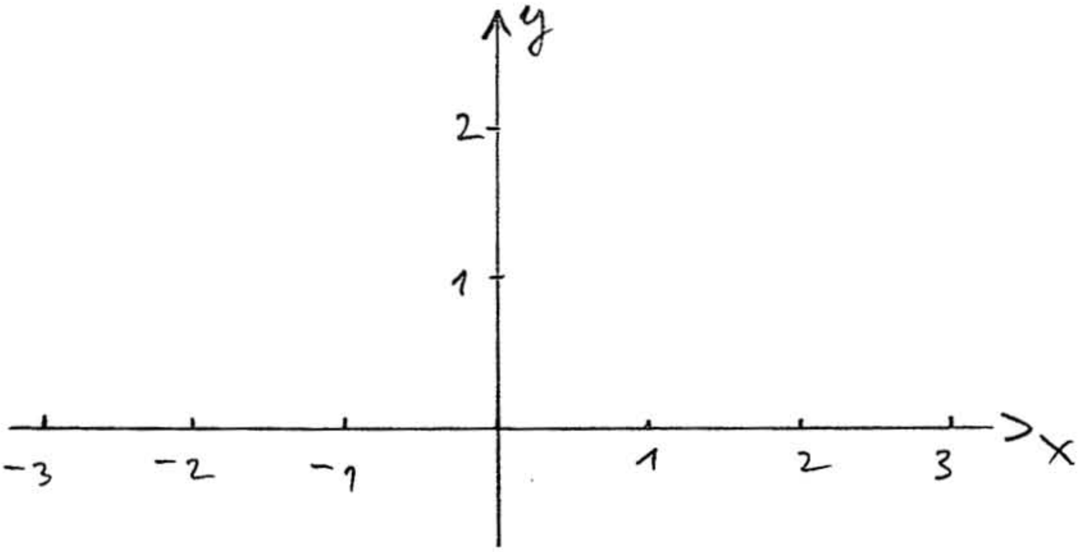
$$f_2(x) := f_0(x-2)$$

$$f_{-1}(x) := f_0(x-(-1))$$

Erstelle für die Funktionen f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1 Wertetabellen.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_{-1}(x)$							
$f_0(x)$							
$f_1(x)$							
$f_2(x)$							

Skizziere die Funktionsgraphen von f_{-1}, f_0, f_1, f_2



Für $k = -1, 1, 2$: Beschreibe den geometrischen Zusammenhang zwischen dem Graphen von $f_0(x)$ und $f_k(x)$.

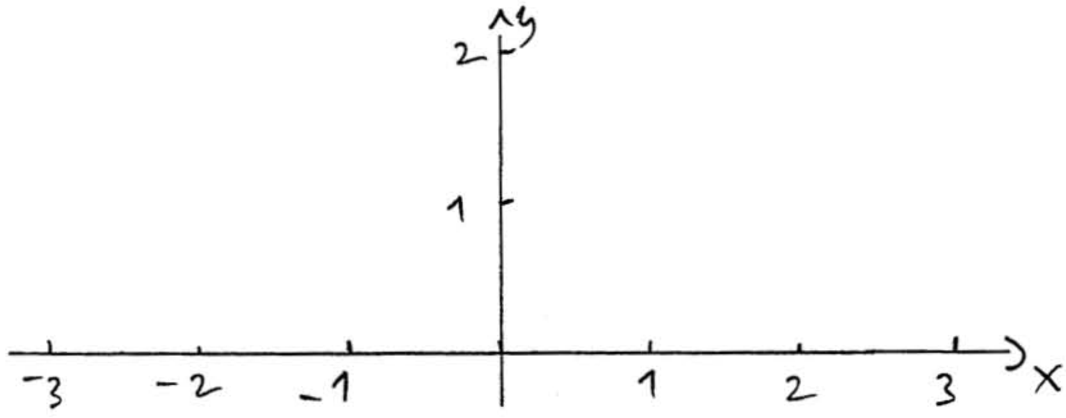
c) Sei nun $u = 2$, $v = 1$, $f_{00}(x) := |x|$

und $f_{uv}(x) := f_{00}(x-2) + 1$

Erstelle eine Wertetabelle von f_{00} und f_{uv}

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_{00}(x)$							
$f_{uv}(x)$							

sowie eine Skizze der Funktionsgraphen von f_{00} und $f_{uv}(x)$



Beschreibe den geometrischen Zusammenhang zwischen dem Graphen von $f_{00}(x)$ und dem Graphen von $f_{uv}(x)$ $(u = 2\ ,\ v = 1)$.

VERSCHIEBUNGSSATZ

d) ⇝ Diesen Zusammenhang gilt für <u>beliebige</u> Funktionen $f(x)$ und Werte von u und v:

$$f_{uv}(x) = f(x-u) + v.$$

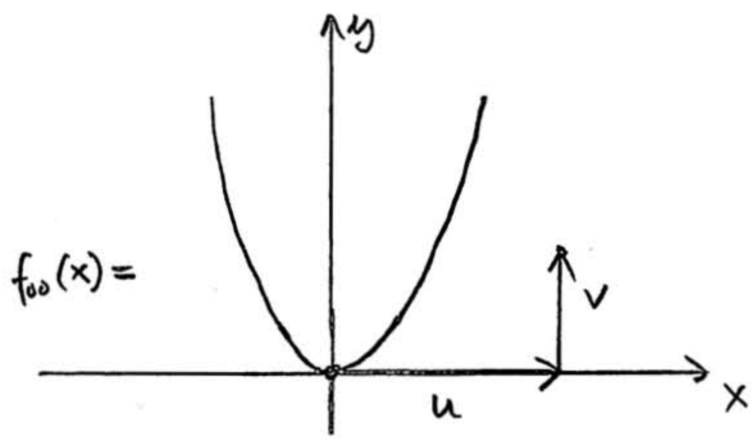
Den Graphen von $f_{uv}(x)$ erhält man aus dem Graphen von $f(x)$ durch:

Insbesondere gilt: Der Graph von

$$f_{uv}(x) := a \cdot (x-u)^2 + v$$

entsteht durch

aus dem Graphen von $f_{00}(x)$ =



Insbesondere haben die Graphen von f_{uv} und f_{00} dieselbe Form und dieselbe Öffnung.

Scheitelpunkte

$f_{00}(x)$:

$f_{uv}(x)$:

Beispiele :

- $f_{uv}(x) = 2(x-1)^2 + 5$: $u =$, $v =$, $S($, $)$
  $a =$

- $f_{uv}(x) = (x+3)^2$: $u =$, $v =$, $S($, $)$
  $a =$

- $f_{uv}(x) = -(x+1)^2 - 1$: $u =$, $v =$, $S($, $)$
  $a =$

Verschiebungssatz Aufgaben

1) Sei $f(x)$ linear mit Steigung $m = 3$ und Nullstelle $x_0 = 3$. Gib die Funktionsgleichung von $f(x)$ mithilfe des Verschiebungssatzes an.

2) Eine verschobene Betragsfunktion $f(x) = |x - u| + v$ hat die Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$. Bestimme u und v.

Definition (Scheitelform SF einer qu. Fn)

Sei $f(x) := \underline{a \cdot (x-u)^2 + v}$, $a \neq 0$

mit gegebenen Parametern $a \neq 0$, u, v.

Diese Form heisst <u>Scheitelform</u> der qu. Fn. $f(x)$.

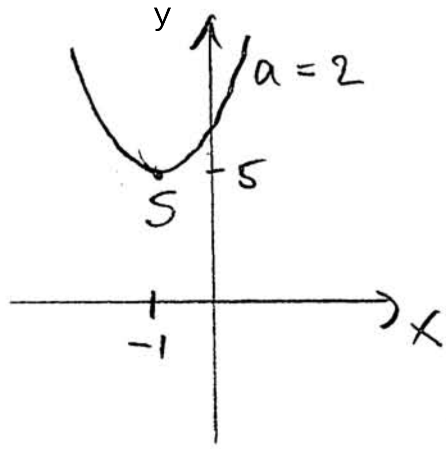
Es gilt:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = & \text{Leitkoeffizient der zugeh.} \\ & \text{Grundform (später)} \\ u, v: & \text{Scheitelpunktskoordinaten} \end{array} \right.$$

Aus der SF kann direkt Leitkoeffizient a und Scheitelpunkt S(u,v) ausgelesen werden.

Bsp:

$$f(x) = \underbrace{2}_{a}(x - \underbrace{(-1)}_{u})^2 + \underbrace{5}_{v}$$



$\underline{a = 2, \quad S(\quad , \quad)}$

Transformation SF $\leftrightarrow$ GF

Hinweis:

GF: $g(x) = a \cdot x^2 + bx + c$

SF: $g(x) = a \cdot (x-u)^2 + v$

a) SF $\rightarrow$ GF

$g(x) = a \cdot (x-u)^2 + v$ ausmultiplizieren & zusfassen

$= a \cdot [x^2 - 2xu + u^2] + v$

$= a \cdot x^2 \underbrace{-2au}_{} \cdot x + \underbrace{au^2 + v}_{}$

$= a \cdot x^2 + bx + c$ GF

mit $a = \quad ; \quad b = \qquad ; \quad c =$ (SF $\rightarrow$ GF)

Bsp: $g(x) = 2(x-1)^2 + 5$ $a = \quad , u = \quad , v =$

$=$ __________ $a = \quad , b =$

$c =$

b) GF → SF

Hinweis (SF->GF):

$a =$; $b =$; $c =$

Gesucht: a, u, v mit

$a = a$

$b =$ $\rightarrow u =$

$c =$ $\rightarrow v =$

Damit: $a = a$; $u =$; $v =$

(GF → SF)

Beispiel: $g(x) = 2x - 4x + 7$ $a =$; $b =$; $c =$

$u =$

$v =$

$\Rightarrow$ $g(x) = 2 \cdot (x - 1)^2 + 5$

Aufgaben zur Scheitelform SF

1) Gegeben sind folgende qu. Fus. in SF. Lie die Scheitelform-Parameter a, u, v heraus.

a) $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 + 3$

b) $g(x) = (-3)(x-2)^2 - 3$

c) $h(x) = (x+1)^2 + 4$

d) $k(x) = 2x^2 + 4$

e) $m(x) = -(x-5)^2 - 3$

f) $n(x) = (2-x)^2$

2) Gegeben sind die Scheitelform-Parameter a, u, v. Formuliere die Funktionsgleichung in der Scheitelform (SF) und in der Grundform (GF).

a) $a = 1, \; u = 5, \; v = 5$

b) $a = \frac{1}{10}, \; u = 0, \; v = -1$

c) $a = -3, \; u = -2, \; v = 0$

d) $a = 4, \; u = 3, \; v = -3$

3) Wandle in die GF um

a) $f(x) = -(x-1)^2 + 5$

b) $g(x) = (x+2)^2$

c) $h(x) = 5x^2 + 2$

d) $k(x) = -(x+3)^2 - 1$

4) Bestimme den Leitkoeffizienten und die Scheitelpunktskoordinaten und stelle in der SF dar.

a) $f(x) = -2x^2 - 12x - 11$

b) $g(x) = 2x^2 - 2x + 1.5$

c) $h(x) = 11x^2 - 66x + 99$

d) $k(x) = 2x^2$

e) $m(x) = 2 \cdot (x-2) \cdot (x-3)$

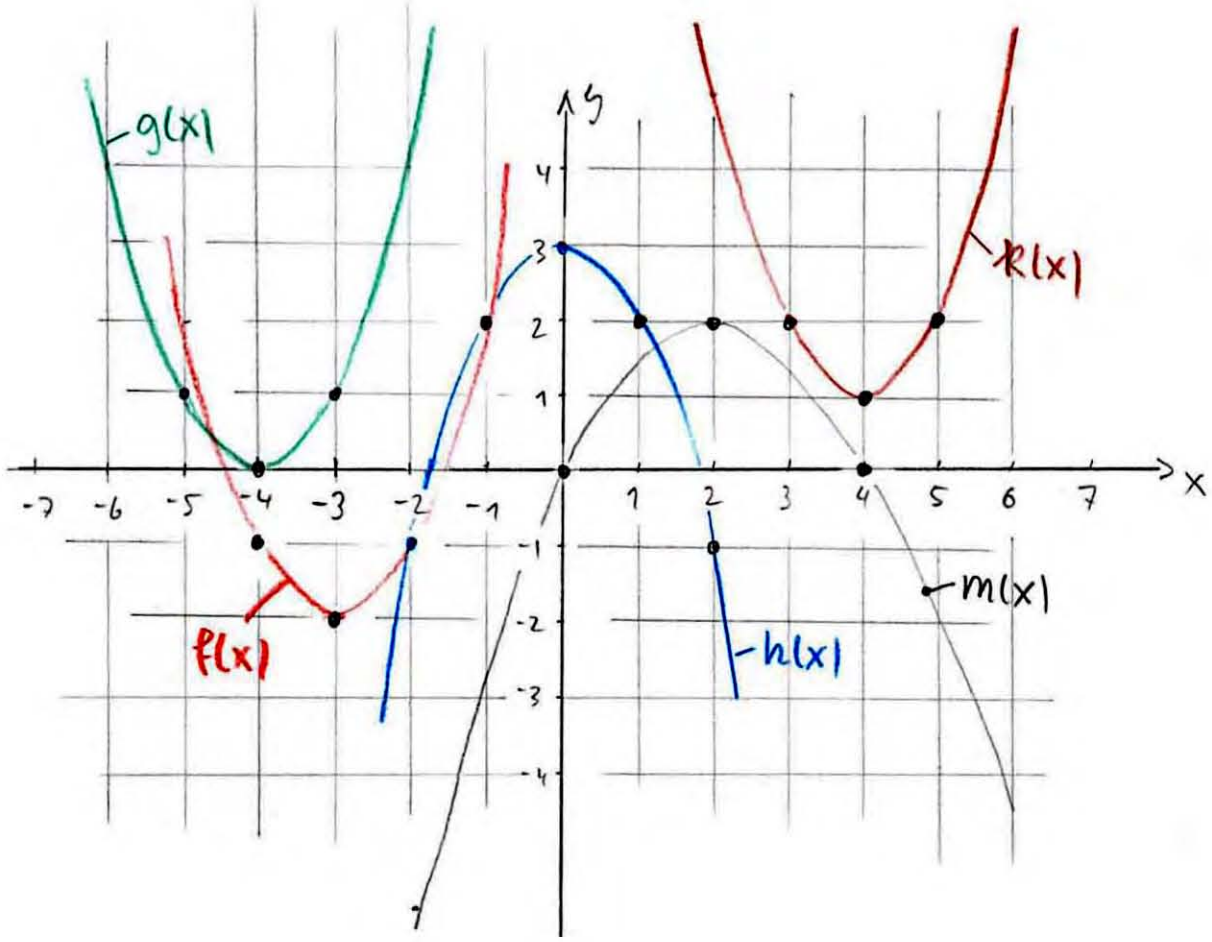
5) Die qu. Fn. $f(x)$ nimmt an der Stelle $x = 7$ den Maximalwert 11 an und hat den Leitkoeffizienten -3.

Bestimme die Scheitelform und die Grundform.

6) Gib die Funktionsgleichung der qu. Fu. in der SF an bei der der Scheitelpt S und ein weiterer Graphenpunkt P bekannt sind. Erstelle eine Skizze des Funktionsgraphen

a) S(-2, 4), P(5, 28.5)
b) S(-2, 5), P(0, 0)
c) S(2, -2), P(1, -4)
d) S(-1, 2), P(-3, 18)

7) Bestimme die Scheitelform aus den Angaben der Skizze



Bestimme die Schnittpunkte der Fn-Graphen

a) $f_1(x) = -2x^2 + 12x - 13$ $\quad$ $f_2(x) = -2x + 7$

b) $g_1(x) = x^2 + 4x - 2$ $\quad$ $g_2(x) = 2x + 6$

c) $h_1(x) = -3x^2 + 6x + 5$ $\quad$ $h_2(x) = 2x^2 + 4x - 2$

d) $k_1(x) = x^2 - 4x + 1$ $\quad$ $k_2(x) = -x^2 + 2x + 1$

e) $m_1(x) = -x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $m_2(x) = -2x + 5$

f) $p_1(x) = x^2 + 4x + 2$ $\quad$ $p_2(x) = -2x - 7$

g) $q_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ $\quad$ $q_2(x) = x^2 + 2$

h) $r_1(x) = -2x^2 + 8x - 4$ $\quad$ $r_2(x) = x^2 + \frac{4}{3}$

Lösungen

a) $(2,3)$, $(5,-3)$

b) $(-4,-2)$, $(2,10)$

c) $(-1,-4)$, $\left(\frac{7}{5}, \frac{188}{25}\right)$

d) $(0,1)$, $(3,-2)$

e) $(2,1)$

f) $(-3,-1)$

g) $(1,3)$

h) $\left(\frac{4}{3}, \frac{28}{9}\right)$

Produktform (PF) / Nullstellenform

$$f(x) = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) \qquad a \neq 0 \qquad \text{(PF)}$$

x_1, x_2 sind die Nullstellen der qu. Fn $f(x)$.

GF → PF : $D = b^2 - 4ac$

falls $D \geq 0$ so existiert die PF

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

PF → GF : ausmultiplizieren

$$f(x) = ax^2 - a(x_1+x_2)\,x + a\,x_1 x_2$$

$a = a$

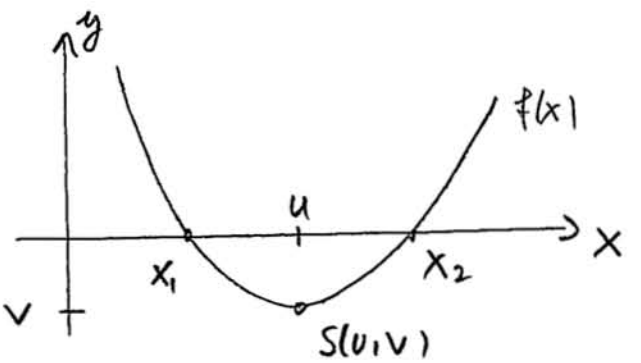
$b = -a(x_1+x_2)$

$c = a\,x_1 x_2$

Transformation Scheitelform – Produktform

- SF: $f(x) = a \cdot (x-u)^2 + v$
- PF: $f(x) = a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)$

SF $\longrightarrow$ PF (falls $\frac{v}{a} \leq 0$):



$\left(\frac{v}{a} \leq 0\right)$

$$f(x) = a \cdot (x-u)^2 + v \qquad , a \neq 0 \qquad (SF)$$

$$= a \cdot \left[(x-u)^2 + \frac{v}{a} \right]$$

$$= a \cdot \left[(x-u)^2 - \left(-\frac{v}{a} \right) \right]$$

$$=$$

$$=$$

$$= a \cdot \left(x - (\underbrace{\qquad\qquad}_{x_1}) \right) \cdot \left(x - (\underbrace{\qquad\qquad}_{x_2}) \right) \quad (PF)$$

$x_{1,2} =$

PF → SF

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)\ , \quad a \neq 0 \quad (PF)$$

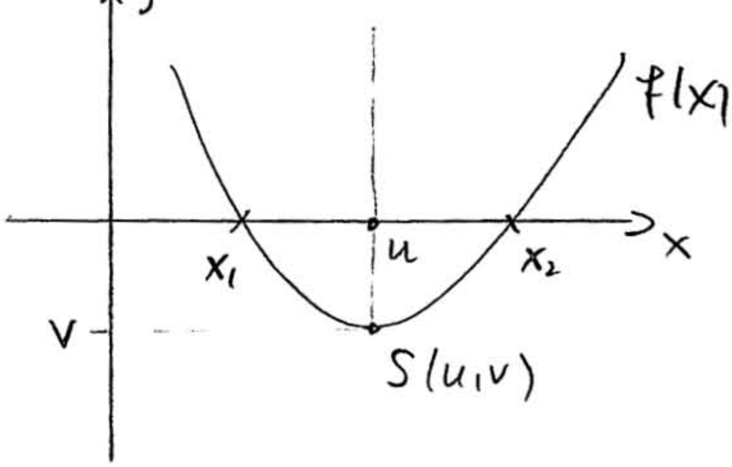
$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$= a \cdot (x - \underbrace{\qquad}_{u})^2 + \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{v} \qquad (SF)$$

$$\begin{cases} a = a \\ u = \\ v = \end{cases}$$



Hinweise

Anz. Parameter: Um eine qu. Fu zu deklarieren sind 3 Parameter notwendig:

GF : a, b, c

SF : a, u, v

PF : a, x_1, x_2