Grundlagenfach Mathematik 4. Gym

Teil 1: Quadratische Gleichungen

U. Aeberhard

Quadratische Gleichungen

Die Quadratwurzel

Das Quadrieren einer Zahl a

$$\boxed{a^2 := 1 \cdot a \cdot a}$$

a	-3	-2	-1	0	1	2	$\dots$
$b := a^2$							

<u>Bemerkung</u>: <u>$a^2 \geq 0$</u>, $(-a)^2$, a^2 haben denselben Wert

- Quadrieren : $a \longmapsto a^2$
- Radizieren / Wurzelziehen : <u>umgekehrte Richtung</u>:

$$b \longmapsto a \quad \text{mit} \quad a^2 = b,\ a \geq 0$$

für $b \geq 0$

Bsp:

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend left, "\text{quadrieren}"] & 4 \arrow[l, bend left, "\text{Wurzel ziehen}"] \end{tikzcd}$$

- Für nichtnegative Zahlen sind <u>Quadrieren</u> und <u>Wurzelziehen</u> <u>umgekehrte Operationen</u>

Definition der Quadratwurzel

Für $b \geq 0$ sei $\sqrt{b}$ diejenige nichtnegative Zahl a, die quadriert wieder b ergibt:

$$\boxed{\sqrt{b} := a \quad \text{wobei } a^2 = b,\ a \geq 0}$$

Für $b<0$ ist $\sqrt{b}$ nicht definiert, da kein Quadrat negativ sein kann.

"Radizieren" oder Wurzelziehen bezeichnet die Operation $\sqrt{b}$

Bsp: Wir ziehen die Wurzel aus 4:

$$\sqrt{4} = 2$$

Radikand

Wert der Wurzel

- Wurzelwerte sind nie negativ.

b	negative Z.	0	1	2	3	4	5	...
$\sqrt{b}$								

- Wurzelwerte sind
  - rational ( )
  - irrational, d.h. nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbar

Aufgaben Feuerlein:
S13 A2
S24 A6, A7

<u>Satz</u> <u>$\sqrt{2}$ ist nicht rational</u>, d.h. kein Bruch ganzer Zahlen

<u>Beweis:</u> Wir führen die Annahme

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{gekürzt, d.h. } ggT(p,q) = 1$$

zu einem Widerspruch!

A: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $ggT(p,q) = 1$

Die Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ = Menge aller Brüche ganzer Zahlen:

$$= \underline{\underline{\left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \right\}}}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ nat. Z.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ganze Z.

<u>Beispiele</u>: $\frac{4}{5} =$

$\frac{2}{3} =$

$5 =$

$-0{,}75 =$

$0{,}234545\dots$

Die Dezimalbruchdarstellung rationaler Zahlen ist

-

-

Es gilt: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$

Die irrationalen Zahlen

-

-

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ = Menge aller Dezimalbrüche :

-

-

-

Somit umfasst $\mathbb{R}$ die Menge $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

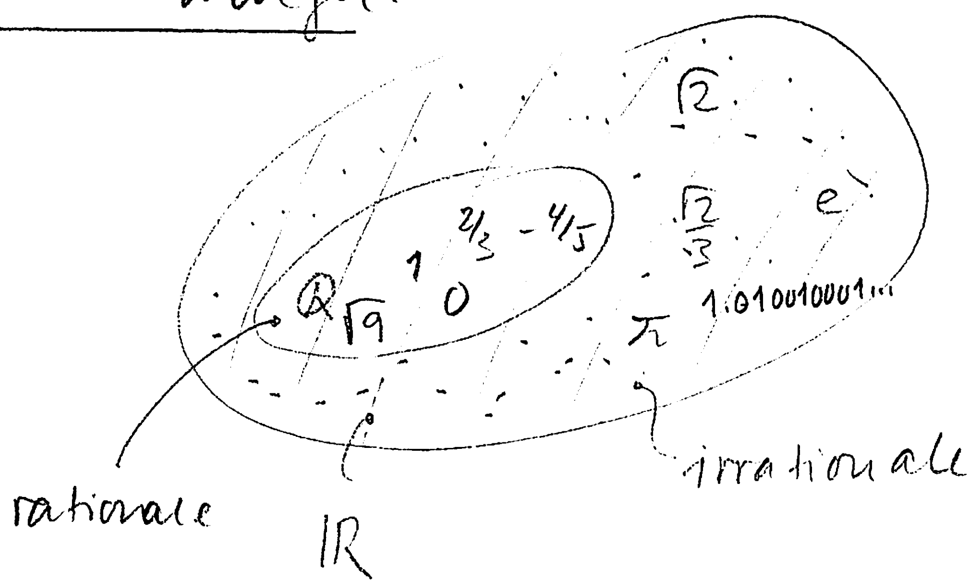
Was dazukommt sind die irrationalen Zahlen, z.B

Eigenschaften von $\mathbb{R}$:

- geordnete Menge
- man kann rechnen $(+, -, \cdot, :)$ wie mit rationalen Zahlen

Aufgaben Feuerlein: S20 A5, A7

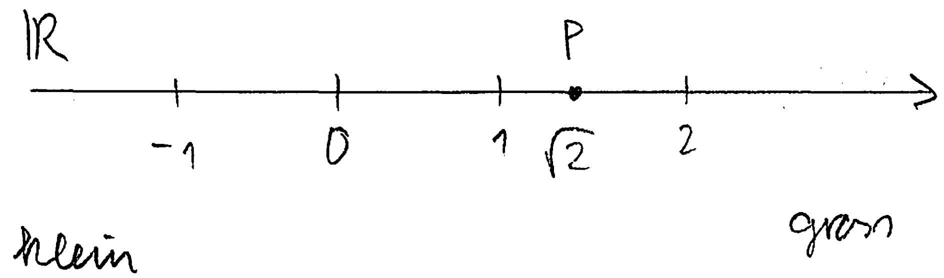
Zahlenmengen:



$$\boxed{\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}}$$

$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, es gibt aber viel mehr irrationale Zahlen wie rationale

Zahlenstrahl:
- Jeder Punkt entspricht einer reellen Zahl
- geordnet, aufsteigend



Rechnen mit Quadratwurzeln

a) Multiplikationsregel: Für $a, b \geq 0$ gilt

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

b) Divisionsregel: Für $a \geq 0$, $b > 0$ gilt

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

c) Summen und Differenzen von Wurzeln dürfen nicht gliedweise radiziert werden

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

d) Eine Summe von Wurzeln kann nur zusammengefasst werden, wenn der gleiche Radikand vorliegt.

- $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{8} + \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Anwendungen:

1. Zusammenfassen

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$
- $\dfrac{\sqrt{a^2 b}}{\sqrt{b}} =$

2. Teilweises Wurzel ziehen

- $\sqrt{12} =$
- $\sqrt{a^3} =$

3. Addition / Subtraktion von Wurzeln

- $\sqrt{8} - \sqrt{2} =$

4. Nenner wurzelfrei machen

- $\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$
- $\dfrac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} =$

<u>Beweis</u> (Multiplikationsregel):

Nenner wurzelfrei machen

Bsp: $\frac{2}{\sqrt{3}} =$

Hinweis: geeignet erweitern!

Aufgaben Feuerlein: S32 A1, S33 A5, S35 A17, S36 A22

$\frac{7}{3+\sqrt{5}} =$

Hinweis: 3. Binom!

$\frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$

Hinweis: 3. Binom!

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}} =$$

<u>Hinweis</u>: schrittweise vorgehen

Vollständige Quadrate :

Summe / Differenz lässt sich
als Quadrat darstellen (⇝ Binom. Formeln)

$$a^2 - 6a + 9 =$$

Somit

$$\sqrt{a^2 - 6a + 9} =$$

$$=$$

Aufgaben Feuerlein S14 A10 A11

Faktorisierbare Summen / Differenzen

- $a^2 - b^2$

⇝ $\sqrt{a^2 - b^2} =$

Quadratische Gleichungen

Einführungsbeispiel

Ein Geschoss wird senkrecht in die Höhe geschossen. Für die Höhe des Projektils in Meter nach t Sekunde Flug gilt dabei:

$$h(t) = -5t^2 + 50t$$

1) Bestimme h(t) für verschiedene Werte t

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h											

2) Nach welcher Zeit trifft das Geschoss wieder am Boden (Höhe Null) auf? Formuliere eine Gleichung. Benutze die Wertetabelle für die Lösung.

Quadratische Gleichungen (qu. Gl)

Eine Gleichung heisst quadratisch, gdw (genau dann wenn) sie durch Äquivalenzumformungen* in die Form

$$\boxed{\underbrace{a}_{\text{Leitkoeff}}\cdot x^2 + \underbrace{b}_{\text{lin. Koeff}}\cdot x + \underbrace{c}_{\text{Konstanter Koeff}} = 0 \quad , \quad a \neq 0} \qquad \text{GF (Grundform)}$$

gebracht werden kann. Dabei sind die Koeffizienten a, b und c gegeben und x ist gesucht.

Eine Gleichung heisst reinquadratisch gdw sie quadratisch ist und der lineare Koeff. $b = 0$ ist.

Beispiele:

- $(x-7)^2 + 5x + 3 = 0 \quad : \quad a = 1, b = -9, c = 52$
- $5t^2 + 10t - 20 = 0 \quad : \quad a = 5, b = 10, c = -20$
- $2\cdot(x-3)\cdot(x+4) = 0 \quad : \quad a = 2, b = 2, c = -24$
- $(x-2)(x+2) = 0 \quad : \quad a = 1, \underline{b = 0}, c = -4$ reinquadratisch

Aufgaben Feuerlein: Erstelle Grundform in S40 A1, S41 A11, A12

---

* Umformungen der Gleichung, die die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ nicht ändern.

Die Lösungsmenge qu. Gln und ihre Bestimmung

Geg: qu. Gl in Grundform (GF)

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \quad \text{Geg: } a \neq 0, b, c$$

Ges: Lösungsmenge $\mathbb{L}$

$$\boxed{\mathbb{L} = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \}}$$

Methoden:

1) ausprobieren (→ Horner-Schema)

2) Faktorisieren
   - 2-Klammersatz / Viëta
   - cleveres Faktorisieren / qu. Ergänzen

3) Lösungsformel anwenden

Bsp $2x^2 - 3x - 2 = 0$

1) ausprobieren:

	a	b	c	
	2	-3	-2	1. Zeile: a b c
Testen mit $x=2$		4	2	
	2	1	0 ✓	$=0$ d.h. 2 ist Lösung
$x = -\frac{1}{2}$		-1		
	2	0 ✓		$=0$ d.h. $-\frac{1}{2}$ ist Lösung

$\rightarrow$

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{1}{2}, 2 \right\}$$

Horner-Schema: Auswerten von $ax^2 + bx + c$:

	a	b	c	1. Zeile
x		ax	ax^2+bx	
	a	$ax+b$	ax^2+bx+c	$\leftarrow$ Resultat

- Koeff der GF in 1. Zeile
- x wählen und in 2. Zeile ganz links
- Zick-Zack von oben links nach unten rechts rechnen

  nach unten: addieren
  diagonal nach rechts oben: mal x
- unten rechts steht das Resultat

Beispiel: Werte $5x - x^2 + 2$ für $x = 2$ aus!

$x = 2$

Suche $\mathbb{L}$ durch ausprobieren: $2x^2 - 9x - 5 = 0$

Aufgaben Feuerlein: S40 A5: Bestimme die Lösungen durch Ausprobieren mittels dem Horner-Schema

2) Faktorisieren

- **Satz** (Nullteilerfreiheit von $\mathbb{R}$)

$$\boxed{u \cdot v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{u = 0 \text{ oder } v = 0}}$$

Bsp: $(x-5)\cdot(x+\frac{1}{2}) = 0$

$$\Updownarrow$$

$\underline{x-5=0}$ oder $\underline{x+\frac{1}{2}=0}$

$x = 5$ oder $x = -\frac{1}{2}$

$$\underline{\mathbb{L} = \{-\tfrac{1}{2}, 5\}}$$

Hinweis: $2\cdot(x-5)\cdot(x+\frac{1}{2}) = 0$

$\mathbb{L} =$

2) Faktorisierungsmethoden:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = \text{Produkt ?}$$

- 2-Klammersatz / Viëta

Bsp: $(a = 1)$

wollen das:

$$0 = x^2 + 2x - 15 = \underbrace{(x+u)\cdot(x+v)}$$

mit $u \cdot v =$

$u + v =$

Suche alle (ganzen) Teiler von ______

deren Summe ______ ist!

somit $x^2 + 2x - 15 = (x \qquad)(x \qquad) = 0$

$\mathbb{L} = \{ \qquad \}$

Aufgabe Feuerlein: S49 A3
Challenge: S49 A5

Bsp 2 x ausklammern (und LK).

Leitkoeffizient

$$2x^2 - 3x = 0$$

LK x

$$2 \cdot x \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$

________ ________

$\mathbb{L} =$

Aufgabe Feuerlein: S41 A10
Challenge: S41 A11

Bsp 3 Binom III (bei reinquadratischen Gln)

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$3 \cdot (x^2 - 3^2) = 0$$

$$3 \cdot (x + 3)(x - 3) = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$

________ ________

$\mathbb{L} =$

Aufgabe Feuerlein: S41 A1 mit Binom!

Cleveres Faktorisieren / 'quadr. Ergänzen':

Gegeben: qu. Gl (Grundform)

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Gesucht: (falls möglich):

qu. Gl (Produktform / 'Nullstellenform')

$$a \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) = 0 \qquad a \neq 0$$

1) Leitkoeffizient a ausklammern
2) x ausklammern
3) Produkt ausbalancieren
4) 3. Binom anwenden
5) Konstanter Term absorbieren

falls möglich:

6) als Differenz zweier Quadrate schreiben
7) 3. Binom rückwärts anwenden
8) in Produktform bringen

- Cleveres Faktorisieren / "quadratisches Ergänzen"

Bsp:

Hinweis: 3. Binom: $(u+v)\cdot(u-v) = u^2 - v^2$

$$2\cdot x^2 + 4\cdot x - 6 = 0$$

Bestimme $\mathbb{L}$ durch cleveres Faktorisieren!

a) $3x^2 - 12x - 63 = 0$

b) $3x^2 + 4x - 4 = 0$

c) $6x^2 + 7x - 5 = 0$

d) $x^2 + 9.9x - 1 = 0$

e) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

f) $3x^2 + 4x + 5 = 0$

g)* $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$

3) Quadratische Gleichungen: Lösungsformel

Geg: qu. Gl (Grundform)

$$a x^2 + b x + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Ges: Lösungsformel für $\mathbb{L}$

→ cleveres Faktorisieren:

$$a x^2 + b x + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Die Lösungsformel anwenden

Gegeben qu. Gl (Grundform)

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad a \neq 0$$

0) Gleichung kürzen

1) Diskriminante berechnen

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

2) Falls $D < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\}}}$

3) Falls $D = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}}}$

4) Falls $D > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}, -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right\}}}$

Beispiele

1) $5x^2 - 3x + 1 = 0$

$D =$

$\mathbb{L} =$

2) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$D =$

$\mathbb{L} =$

3) $6x^2 + 2x - 8 = 0$

$D =$

$\mathbb{L} =$

4) $-2x - 5x^2 = -10$

$D =$

$\sqrt{D} =$

$\mathbb{L} =$

Bestimme IL mithilfe der Lösungsformel

a) $3x^2 - 12x - 63 = 0$

b) $3x^2 + 4x - 4 = 0$

c) $6x^2 + 7x - 5 = 0$

d) $x^2 + 9.9x - 1 = 0$

e) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

f) $3x^2 + 4x + 5 = 0$

g) $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$

Substitution, bi-quadr. Gl., etc

- $\frac{2}{3}x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

- $2x + 3\sqrt{x} - 5 = 0$

Definitionsmenge x>=0

$$\frac{2}{x^2} - \frac{5}{x} - 1 = 0$$

Es kommen 1/x^2 und 1/x vor
Definitionsmenge x ungleich 0

Produktform und Grundform qu Gl

$$\boxed{GF: \quad ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0}$$

$D = b^2 - 4ac$

$D \geq 0$

$$\boxed{PF: \quad a \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) = 0 \qquad a \neq 0}$$

falls eine Lösung x_0, x_1 existiert

- falls keine Lösung existiert : keine PF
- falls eine Doppellösung x_0 existiert : $a(x-x_0)^2 = 0, a \neq 0$
- PF heisst auch Nullstellenform

Bsp:

$$\boxed{2x^2 + 6x - 8 = 0} \quad GF$$

$D = 36 + 64 = 100$

① $D \geq 0$ ②

$$\boxed{2 \cdot (x-1) \cdot (x+4) = 0} \quad PF$$

Umformen:

① $(D \geq 0)$ GF → PF :
- Nullstellen bestimmen und in PF einsetzen
- Faktorisieren

② PF → GF : ausmultiplizieren

(1) $2x^2 + 6x - 8 = 0$ GF $\longrightarrow$ Ziel PF

- Nullstellen bestimmen, z.B. durch Lösungsformel:

- Faktorisieren, z.B. 2-Klammersatz (Vieta)
  (kein Erfolg → cleveres Faktorisieren)

(2) $2(x-1)\cdot(x+4) = 0$ PF $\longrightarrow$ Ziel: GF

- ausmultiplizieren:

D < 0: dann funktioniert die Methode nicht da $u^2 + v^2$ sich nicht
faktorisieren lässt.

Quadratische Glen Begriffe

- Grundform
- Leitkoeffizient, lin Koeff, konst. Koeff
- reinquadratisch
- Äquivalenzumformung
- Lösungsmenge / Grundmenge
- Horner Schema
- 2 Klammersatz / Vieta
- Nullteilerfreiheit von $\mathbb{R}$.
- Linearfaktor
- Produktform
- Binom III
- cleveres Faktorisieren / qu. Ergänzen
- Lösungsformel
- Diskriminante
- Biquadr. Gl.
- Substitution / Rücksubstitution
- Definitionsmenge / -bereich

Textaufgaben

1) Text lesen
2) Variable für die Gesuchte verwenden
   (meist x)
3) Gleichung aufstellen
4) Gleichung lösen
5) Text lesen, Antwort formulieren.

Aufgaben Feuerlein: S53-55 A1-A12
Challenge: S55 Tüftelecke 1, 2

Quadratische Gln mit Parameter

Bsp: $x^2 + (3a-1)x + (2a^2 - 2a) = 0$

Aufgaben Feuerlein: S58 A2, A6

<u>Bsp 2:</u> $x^2 - (2t+2)x + (t^2+t) = 0$