bsv
Mathematatik

Mathematik 9
Algebra

Feuerlein
Titze
Walter

Mathematik 9
Algebra

von
Rainer Feuerlein
Helmut Titze
Harald Walter

Bayerischer Schulbuch-Verlag

bsv Mathematik

Die europäische Währung wird in diesem Werk mit € abgekürzt.

www.oldenbourg-bsv.de

2. Auflage 2001 R E
Druck 04 03 02 01 00
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.
Alle Drucke dieser Auflage sind untereinander unverändert und im Unterricht nebeneinander verwendbar.

Illustrationen: Rainer Stolte, München
Umschlaggestaltung: Lutz Siebert unter Verwendung einer Computergrafik von Herbert W. Franke und Horst Helbig
Satz und Druck: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau

ISBN 3-7627-**3745**-2

Inhalt

Reelle Zahlen

Quadratische Gleichungen

Quadratische Funktionen

Wurzelfunktionen und nichtlineare Gleichungssysteme

§ 1 Reinquadratische Gleichungen

Tragfähigkeit des Eises

Für das Betreten des Eises auf Gewässern mit Süßwasser kann die Tragfähigkeit durch folgende Faustformel berechnet werden:

$G = 100\,\frac{N}{cm^2} \cdot d^2$ *G: höchstzulässiges Gewicht der Person*[1]
d: Dicke des Eises

a) Berechne zu folgenden Eisdicken d, wie schwer die Personen höchstens sein dürfen, die das Eis betreten können!

d in cm	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
G in N						

b) Wie dick muss das Eis mindestens sein, damit eine 625 N schwere Person es betreten kann?

A. Das Quadrieren ganzer Zahlen

Im 7. und 8. Schuljahr sind beim Lösen von Gleichungen die Quadrate der Variablen entweder überhaupt nicht aufgetreten oder weggefallen. Wir werden uns nun mit Gleichungen befassen, in denen sich die Quadrate der Variablen nicht wegheben. Bevor wir uns diesen quadratischen Gleichungen zuwenden, frischen wir unsere Kenntnisse über das Quadrieren auf.

> Multipliziert man eine rationale Zahl a mit sich selbst, so erhält man ihr *Quadrat*. Man schreibt dafür a^2.
>
> $a \cdot a = a^2$ (Gelesen: „a hoch 2" oder „a Quadrat")

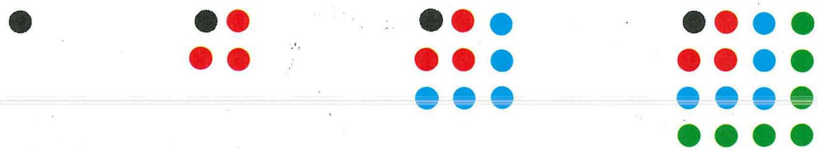
a^2 ist der Sonderfall einer Potenz, nämlich mit dem Exponenten 2. a ist die Basis.

Die Quadrate *ganzer* Zahlen nennt man *Quadratzahlen*.

[1] Wird die Belastung durch Hinlegen auf eine größere Fläche verteilt, erhöht sich die Tragfähigkeit.

Multipliziert man eine negative Zahl mit sich selbst, so erhält man eine positive Zahl. Es gibt also keine negativen Quadratzahlen. Quadratzahlen sind 0, 1, 4, 9, 16, 25, usw.

Bereits im 6. Jh. v. Chr. gelang es Pythagoras und seinen Schülern, bemerkenswerte Eigenschaften der natürlichen Zahlen aufzuspüren. Mit Rechensteinen konnten sie zeigen, dass eine mit 1 beginnende Summe aufeinander folgender ungerader Zahlen eine Quadratzahl ergibt:



1 $\qquad 1+3=4$ $\qquad 1+3+5=9$ $\qquad 1+3+5+7=16$

Nicht nur für Überschlagsrechnungen sind die folgenden Aussagen über die Stellenzahl von Basis und Quadrat nützlich:

Es sei a eine natürliche Zahl.

a	a^2	Ist a	so ist a^2
$1 \leqq a < 10$	$1 \leqq a^2 < 100$	einstellig	ein- oder zweistellig
$10 \leqq a < 100$	$100 \leqq a^2 < 10000$	zweistellig	drei- oder vierstellig
$100 \leqq a < 1000$	$10000 \leqq a^2 < 1000000$	dreistellig	fünf- oder sechsstellig
...	...	...	...

Stellenregel

Ist a eine n-stellige ganze Zahl, so ist ihr Quadrat a^2 entweder $(2n-1)$- oder 2n-stellig.

B. Das Quadrieren von Bruchzahlen

Das Quadrat einer *ganzen* Zahl, eine Quadratzahl, ist eine *natürliche* Zahl oder die Null. Was für eine Zahl erhält man, wenn man eine gebrochene Zahl quadriert?

Beispiel: $\left(\frac{14}{15}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}\right)^2 = \frac{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{196}{225}$

Wir bekommen hier wieder eine gebrochene Zahl. Dieses Ergebnis lässt sich verallgemeinern:

Satz

Das Quadrat einer *gebrochenen* rationalen Zahl ist eine positive *gebrochene* rationale Zahl.

Beweis: Jede gebrochene Zahl a lässt sich durch einen vollständig gekürzten Bruch darstellen. Zerlegt man seinen Zähler in die Primfaktoren p_1, $p_2, \ldots, p_m$ und seinen Nenner in die Primfaktoren $q_1, q_2, \ldots, q_n$, so sind die Zählerfaktoren von den Nennerfaktoren verschieden:

$$a = \pm \frac{p_1 p_2 \ldots p_m}{q_1 q_2 \ldots q_n} \qquad \begin{array}{l}(+ \text{ falls a positiv ist} \\ \;- \text{ falls a negativ ist})\end{array}$$

Nun ist:

$$a^2 = \frac{p_1 p_2 \ldots p_m \cdot p_1 p_2 \ldots p_m}{q_1 q_2 \ldots q_n \cdot q_1 q_2 \ldots q_n}$$

Durch das Quadrieren treten die schon vorhandenen Faktoren in doppelter Anzahl auf. Es kommen keine neuen Primfaktoren hinzu. Der Bruch ist nicht kürzbar. Er stellt also keine ganze Zahl dar.

C. Reinquadratische Gleichungen

Eine Gleichung, in der die Variable nur im Quadrat auftritt, heißt *reinquadratische* Gleichung.

1. Beispiel: $x^2 - 9 = 0; \quad G = \mathbb{Q}$

1. Lösung: Mithilfe der „Plusminusformel" können wir diese quadratische Gleichung auf zwei lineare Gleichungen zurückführen:

$(x + 3)(x - 3) = 0.$

Da ein Produkt genau dann den Wert 0 hat, wenn mindestens ein Faktor Null ist, folgt:

$x + 3 = 0$ oder $x - 3 = 0$

$x = -3$ oder $x = 3$

$L = \{-3; 3\}$

2. Lösung: $x^2 = 9$

Bekanntlich ist $3^2 = 9$ und $(-3)^2 = 9$. Also:

$x = 3$ oder $x = -3$

$L = \{-3; 3\}$

2. Beispiel: $x^2 = 2; \quad G = \mathbb{Q}$

Da das Quadrat der gesuchten Zahlen eine natürliche Zahl ist, kommen aufgrund unseres Satzes nur ganze Zahlen als Lösungen in Frage. Da 2 keine Quadratzahl ist, gibt es auch keine ganze Zahl, welche die Gleichung erfüllt: $L = \{\ \}$.

Diese Überlegung lässt sich verallgemeinern: Ist die *ganze* Zahl a keine Quadratzahl, so gibt es weder eine ganze Zahl noch eine gebrochene Zahl, deren Quadrat a ist. Die Lösungsmenge der reinquadratischen Gleichung $x^2 = a$ ist dann über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ leer: $L = \{\ \}$

AUFGABEN

1. a) 5^2 b) $(-5)^2$ c) $-(-5)^2$ d) -5^2
e) $-(-5^2)$ f) $5^2 - 4^2$ g) $-5^2 - 4^2$ h) $(-5)^2 - (-4)^2$

2. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ b) $\frac{2^2}{3}$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ d) $-\frac{2^2}{3}$
e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$ f) $-\frac{2^2}{3} + \frac{1^2}{6}$ g) $-\frac{2^2}{3} + \left(-\frac{1}{6}\right)^2$ h) $-\frac{2^2}{3} - \left(-\frac{1^2}{6}\right)$

3. a) $(a - b)^2$ b) $(b - a)^2$ c) $(-a - b)^2$ d) $(a + b)^2$
e) $(3x + 2)^2 - (2 - 3x)^2$ f) $(2z - 0{,}5^2) - (-2z - 0{,}5)^2$

4. a) $(a + b + c)^2$ b) $(a - b + c)^2$ c) $(a - b - c)^2$ d) $(-a - b - c)^2$
e) $(x - y + 1)^2$ f) $(2u - 3v + 1)^2$ g) $(2m - n - 0{,}5)^2$ h) $(-m + 2n + 0{,}5)^2$
i) $(5x - 3y - 2)^2 - (5x + 3y + 2)^2$ k) $(7x + 5y + 3)^2 - (5x + 7y + 3)^2$

5. a) Schreibe die Quadratzahlen von 1^2 bis 10^2 auf!
b) Subtrahiere von jeder Quadratzahl die vorhergehende! Von welcher Zahlenart sind die Werte dieser Differenzen?
c) Vereinfache den Term $(n + 1)^2 - n^2$ und begründe damit das Ergebnis von b) für beliebiges n!

6. Welche Ziffern können auf der Einerstelle einer Quadratzahl stehen?

7. *Ein Rechentrick*
Regel: Eine zweistellige Zahl mit der Einerziffer 5 wird quadriert, indem man die Zehnerziffer mit der folgenden Zehnerziffer multipliziert und an dieses Ergebnis 25 anhängt.
Beispiel: 75^2; Zehnerziffer 7, folgende Zehnerziffer 8; $7 \cdot 8 = 56$;
25 anhängen liefert $5625 = 75^2$
a) Berechne mit dieser Regel im Kopf und überprüfe mit dem Taschenrechner: 15^2, 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, 65^2, 85^2
b) Die Zahlen mit der Einerziffer 5 lassen sich in der Form $10x + 5$ darstellen. Berechne $(10x + 5)^2$! Klammere aus zwei Summanden $100x$ aus und begründe mithilfe dieses Terms die Regel!
c) Berechne mit dem Taschenrechner: 95^2, 105^2, 115^2, 145^2
Wie lässt sich die Regel auf dreistellige Zahlen erweitern?

8. Berechne mit dem Taschenrechner:

a) 9^2	b) $2{,}7^2$	c) $(496 - 132)^2$	d) $555^2 - (444 + 333)^2$
99^2	$0{,}27^2$	$(132 - 496)^2$	$555^2 - (444 - 333)^2$
999^2	$0{,}027^2$	$496^2 - 132^2$	$555^2 - (444^2 + 333^2)$
9999^2	$0{,}0027^2$	$132^2 - 496^2$	$555^2 - (444^2 - 333^2)$

9. Berechne mit dem Taschenrechner:

a) $6^2 - 5^2$, $56^2 - 55^2$, $556^2 - 555^2$, $5556^2 - 5555^2$

b) $7^2 - 4^2$, $57^2 - 54^2$, $557^2 - 554^2$, $5557^2 - 5554^2$

c) $9^2 - 2^2$, $59^2 - 52^2$, $559^2 - 552^2$, $5559^2 - 5552^2$

d) Erkläre die Besonderheit der Ergebnisse mit der „Plusminusformel"!

10. Wie viele dreistellige natürliche Zahlen sind keine Quadratzahlen?

11. *Monotoniegesetz für Quadrate*

a) Zeige: Für beliebige positive rationale Zahlen a_1, a_2 gilt:
Wenn $a_1 < a_2$, dann ist $a_1^2 < a_2^2$.

b) Zeige: Für beliebige negative rationale Zahlen a_1, a_2 gilt:
Wenn $a_1 < a_2$, dann ist $a_1^2 > a_2^2$.

(Hinweis: Multipliziere die Ungleichung $a_1 < a_2$ einmal mit a_1 und ein anderes Mal mit a_2. Folgere aus beiden Ungleichungen jeweils die Behauptung.)

Nr. 12 bis 16: Bestimme die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$!

12. a) $x^2 - 25 = 0$ b) $x^2 - 64 = 0$ c) $x^2 - 169 = 0$
d) $x^2 + 225 = 0$ e) $x^2 = 0{,}01$ f) $x^2 - 0{,}0036 = 0$

13. a) $x^2 - 5 = 0$ b) $8x^2 - 98 = 0$ c) $3x^2 - 9 = 0$
d) $16x^2 = 4$ e) $147x^2 - 27 = 0$ f) $50x^2 - 4 = 0$

14. a) $\frac{1}{2}x^2 - 9 = 9$ b) $\frac{7}{3}x^2 - \frac{7}{12} = 0$ c) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
d) $3x^2 + \frac{1}{2} = 2x^2 - \frac{1}{2}$ e) $4x^2 - \frac{1}{200} = \frac{1}{100} - 2x^2$ f) $3x^2 + \frac{4}{5} = 5x^2 - \frac{16}{5}$

15. a) $(x - 12)(x + 12) = 0$ b) $(x - 12)(x + 12) = 25$
c) $(18x + 7)(18x - 7) = 0$ d) $(18x + 7)(18x - 7) - 32 = 0$
e) $(3 + x)^2 + (3 - x)^2 = 68$ f) $(3x + 1)^2 + (3x - 1)^2 = 34$

16. a) $x - (x + 2)(3 - x) = 19$ b) $6x(x - 2) - (2x - 3)^2 = 16$
c) $(2x - 5)^2 - 4(1 - 3x)(1 - 2x) + 24 = 0$ d) $46 - 2(7x + 11)(7x - 11) = 0$
e) $(3x - 2)^2 - 4(2x + 3)(x - 3) = 40$ f) $(x - 3)^2 - (x - 2)^2 - (x - 1)^2 = 0$

17. Gib über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ die Definitionsmenge D an! Bestimme die Lösungsmenge!

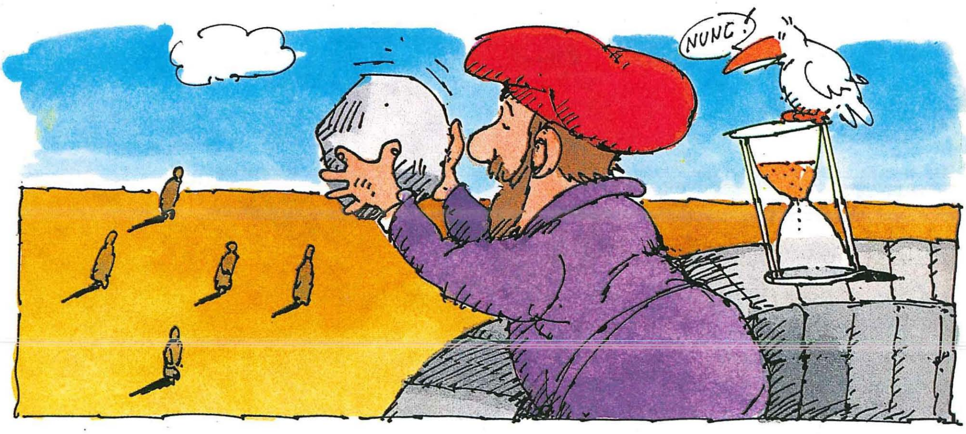
a) $\frac{9}{x} - 3x = x$ b) $\frac{7}{x} - \frac{x}{2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$

c) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = 1$ d) $\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x+3} = \frac{9}{4}$

e) $\frac{x+20}{x-5} - \frac{10x}{2x-10} = x + 1$ f) $\frac{2x+38}{3x+21} - \frac{1-x}{x+7} = \frac{x-2}{3}$

g) $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2-3x}{x^2-4}$ h) $\frac{2x}{x-3} - \frac{x+1}{x+3} = \frac{8x+4}{x^2-9}$

§ 2 Quadratwurzeln



Das Fallgesetz

Galileo Galilei hat 1609 das Fallgesetz gefunden. Es beschreibt, welche Zeit t ein Stein benötigt, um aus der Höhe h auf den Boden zu fallen. Nach einer Legende hat Galilei dazu Fallversuche am Schiefen Turm von Pisa durchgeführt.
Wir werden das Gesetz aus folgenden Messwerten gewinnen:

h in m	5	20	45	80	125
t in s	1	2	3	4	5

a) Durch welche Zahl muss man die erste Höhe (in m) dividieren, um die zugehörige Fallzeit (in s) zu erhalten? Dividiere die anderen Höhen auch durch diese Zahl! Wie kann man allgemein aus der durchfallenen Höhe h (in m) die Fallzeit t (in s) berechnen?

b) Der Schiefe Turm von Pisa ist 55 m hoch. Ein Stein braucht also etwas mehr als 3 Sekunden, um von der obersten Galerie bis zum Erdboden zu fallen. Die höchsten Bauwerke, die Fernsehtürme von Toronto und Moskau, sind ungefähr zehnmal so hoch. Wie lange benötigt ein Stein, um aus 500 m Höhe auf den Boden zu fallen?

A. Definition der Quadratwurzel

Die positive Zahl a sei das Quadrat einer rationalen Zahl. Dann besitzt die Gleichung $x^2 = a$ zwei Lösungen: eine positive und eine negative. Die *positive* Lösung bezeichnet man als die *Quadratwurzel* aus a. Da die Gleichung $x^2 = 0$ die Lösung 0 hat, nimmt man die Null in die Definition der Quadratwurzel mit auf.

Definition:

> Die *Quadratwurzel* aus a ist diejenige *nichtnegative* Zahl, deren Quadrat a ergibt. Man schreibt dafür $\sqrt{a}$ (gelesen: „Quadratwurzel aus a" oder kurz „Wurzel a").
>
> $$(\sqrt{a})^2 = a$$

Die Zahl a unter der Wurzel nennt man *Radikand*[1]. Das Berechnen der Quadratwurzel heißt *Wurzelziehen* oder *Radizieren*.

Beispiele: a) $\sqrt{25} = 5$ b) $\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$

c) $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}$ d) $\sqrt{\frac{338}{98}} = \sqrt{\frac{169}{49}} = \frac{13}{7}$

Ist der Radikand nicht unmittelbar als Quadrat einer rationalen Zahl erkennbar, kann seine Primfaktorzerlegung das Berechnen der Quadratwurzel erleichtern.

Beispiele: a) $\sqrt{676} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 13} = \sqrt{(2 \cdot 13)^2} = 26$

b) $\sqrt{24{,}01} = \sqrt{\frac{2401}{100}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{10 \cdot 10}} = \sqrt{\left(\frac{7 \cdot 7}{10}\right)^2} = 4{,}9$

Durch Einführung des Wurzelzeichens wird der Termbegriff erweitert. Ist T ein Term im bisherigen Sinn, dann wird von nun an auch $\sqrt{T}$ als Term bezeichnet.

Aber nicht jeder Wurzelterm beschreibt eine rationale Zahl. Da es z. B. keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat 2 ist, ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.

B. Quadrieren und Radizieren

Ist der Radikand das Quadrat einer rationalen Zahl, so kann die Wurzel gezogen werden.

Beispiele: a) $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$ b) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

c) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ d) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Bei einer positiven Zahl ist die Wurzel aus dem Quadrat der Zahl gleich der ursprünglichen Zahl. *Das Radizieren ist die Umkehrung des Quadrierens.*
Bei einer negativen Zahl ist die Wurzel aus dem Quadrat der Zahl gleich dem Betrag der ursprünglichen Zahl.

[1] radix (lat.), Wurzel

Also allgemein:

Für beliebige rationale Zahlen a gilt:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Sind die Quadrate zweier rationaler Zahlen a und b gleich, so sind die Zahlen entweder gleiche Zahlen oder Gegenzahlen. Aus der Gleichheit der Quadrate darf also nur auf die Gleichheit der Beträge geschlossen werden:

Aus $a^2 = b^2$ folgt $|a| = |b|$, also $a = b$ oder $a = -b$.

Beispiel: Aus $x^2 = 4$ folgt $|x| = 2$, also $x = 2$ oder $x = -2$.

C. Vollständige Quadrate

Der Radikand sei nun eine Summe. Ist die Wurzel gleich der Summe der Wurzeln aus den einzelnen Summanden?

Beispiele: a) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

aber: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

b) $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

aber: $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$

c) $\sqrt{1+1+1+1+1+1+1} = \sqrt{7}$ ist keine rationale Zahl

aber: $\sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{1} =$
$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$

Unsere Beispiele verneinen die Frage.

Merke:

Eine Summe darf *nicht* gliedweise radiziert werden!

Ist der Radikand eines Wurzelterms eine Summe, so kann man nur dann radizieren, wenn sich diese in ein Quadrat verwandeln lässt.

Ein Summenterm, der sich in ein Quadrat umformen lässt, heißt *vollständiges Quadrat*.

1. Beispiel: $\sqrt{a^2 - 6a + 9} = \sqrt{(a-3)^2} = |a-3|$

Der Betrag ersetzt eine Fallunterscheidung:

$$|a-3| = \begin{cases} a-3, \text{ wenn } a-3 \geqq 0, \text{ d.h. } a \geqq 3 \text{ ist} \\ -a+3, \text{ wenn } a-3 < 0, \text{ d.h. } a < 3 \text{ ist} \end{cases}$$

2. Beispiel: $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x-y)^2} =$

$$= |x-y| = \begin{cases} x-y, \text{ wenn } x-y \geqq 0, \text{ d.h. } x \geqq y \text{ ist} \\ -x+y, \text{ wenn } x-y < 0, \text{ d.h. } x < y \text{ ist} \end{cases}$$

AUFGABEN

1. *Stellenregel*

a) Wie viele Stellen besitzt die Wurzel aus einer $(2n-1)$- oder $2n$-stelligen Quadratzahl?

b) Wir teilen die Quadratzahlen 900, 8100, 90000, 810000 und 0,0009 vom Komma aus nach links und rechts in *Zweierpäckchen* auf:

9 00 81 00 9 00 00 81 00 00 0,00 09

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Zweierpäckchen und der Anzahl der Stellen der Wurzel? Bestimme die Wurzeln und schreibe unter jedes Päckchen die zugehörige Ziffer der Wurzel!

c) Wir interessieren uns für die Wurzel $\sqrt{4761}$. Zerlege die Quadratzahl 4761 in Zweierpäckchen. Welche Zehnerziffer besitzt aufgrund des zugehörigen Päckchens die Wurzel? Welche beiden Einerziffern kommen aufgrund der Einerziffern des Radikanden für die Wurzel in Frage? Welche Ziffer ist die richtige? Gib $\sqrt{4761}$ an! Überprüfe dein Ergebnis mit dem Taschenrechner!

2. Die Radikanden der folgenden Wurzeln sind Quadrate rationaler Zahlen. Ermittle die Wurzelwerte ohne Verwendung des Taschenrechners!

a) $\sqrt{64}$	b) $\sqrt{169}$	c) $\sqrt{289}$	d) $\sqrt{529}$
e) $\sqrt{10000}$	f) $\sqrt{10^6}$	g) $\sqrt{0{,}09}$	h) $\sqrt{0{,}0001}$
i) $\sqrt{4900}$	k) $\sqrt{19600}$	l) $\sqrt{961}$	m) $\sqrt{3481}$
n) $\sqrt{4489}$	o) $\sqrt{53{,}29}$	p) $\sqrt{67{,}24}$	q) $\sqrt{0{,}2209}$
r) $\sqrt{0{,}0225}$	s) $\sqrt{1444}$	t) $\sqrt{0{,}0144}$	u) $\sqrt{15625}$

3. Bestimme, falls es eine rationale Wurzel gibt, deren Wert!

a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$	b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$	c) $\sqrt{\frac{100}{81}}$	d) $\sqrt{\frac{18}{50}}$
e) $\sqrt{\frac{2}{7}}$	f) $\sqrt{\frac{3}{4}}$	g) $\sqrt{\frac{32}{72}}$	h) $\sqrt{\frac{75}{147}}$
i) $\sqrt{\frac{23}{92}}$	k) $\sqrt{\frac{28}{63}}$	l) $\sqrt{\frac{32}{48}}$	m) $\sqrt{\frac{64}{256}}$

4. Wie lang ist die Seite eines Quadrats mit dem Flächeninhalt

a) $400\ \text{cm}^2$ b) $3{,}24\ \text{m}^2$ c) $0{,}0441\ \text{mm}^2$ d) $62500\ \text{m}^2$?

5. Wie lang sind Basis und Basishöhe eines geichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit dem Flächeninhalt

a) $25\ \text{cm}^2$ b) $1\ \text{cm}^2$ c) $0{,}36\ \text{m}^2$?

6. a) $(\sqrt{36})^2$ b) $(\sqrt{256})^2$ c) $\sqrt{7^2}$ d) $\sqrt{31^2}$
e) $(\sqrt{p})^2$ (p Quadratzahl) f) $\sqrt{q^2}$ $(q \in \mathbb{Q}^+)$

7. a) $\sqrt{(-6)^2}$ b) $\sqrt{(-13)^2}$ c) $\sqrt{(-2{,}5)^2}$ d) $\sqrt{(-19{,}5)^2}$
e) $\sqrt{r^2}$ $(r \in \mathbb{Q})$ f) $\sqrt{(-s)^2}$ $(s \in \mathbb{Q})$

8. Schreibe als Quadratwurzel:
a) 3 b) 9 c) -3 d) 0,9
e) $-\frac{1}{3}$ f) $|u|$ g) v^2 h) a^2b^4

Nr. 9 und 10: Radiziere!

9. a) $\sqrt{9a^2}$ b) $\sqrt{16a^2b^2}$ c) $\sqrt{0{,}25a^4b^2}$ d) $\sqrt{0{,}04x^8y^4}$
e) $2a^2 - \sqrt{4a^4}$ f) $\sqrt{x^2} - x$ g) $6z + \sqrt{36z^2}$
h) $u - \sqrt{4u^2}$ i) $2m^2 - \sqrt{(3m^2)^2}$ k) $9b^2 - \sqrt{(-9b^2)^2}$

10. a) $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$ b) $\sqrt{z^2 + 49 - 14z}$ c) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$
d) $\sqrt{1 + 6x + 9x^2}$ e) $\sqrt{x^4 + 1 + 2x^2}$ f) $\sqrt{4a^2 + 4ab + b^2}$
g) $\sqrt{6{,}25p^2 - 2pq + 0{,}16q^2}$ h) $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4} + a}$ i) $\sqrt{16r^2 - 28rs + 49s^2}$

11. Ergänze den Radikanden zu einem vollständigen Quadrat! Radiziere! Führe, falls notwendig, eine Fallunterscheidung durch!
a) $\sqrt{x^2 - 12x + \ldots}$ b) $\sqrt{y^2 + 6y + \ldots}$ c) $\sqrt{z^2 - 5z + \ldots}$
d) $\sqrt{x^2 + 81 - \ldots}$ e) $\sqrt{a^4 + 1 + \ldots}$ f) $\sqrt{4u^2 - 4uv + \ldots}$
g) $\sqrt{1 + 4a^2 + \ldots}$ h) $\sqrt{a^2 - ab + \ldots}$ i) $\sqrt{9b^2 + b + \ldots}$
k) $\sqrt{m^4 + m^2n^2 + \ldots}$ l) $\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \ldots}$ m) $\sqrt{4x^2 + \frac{1}{2}x + \ldots}$

12. Es sei a eine negative rationale Zahl. Vereinfache folgende Terme!
a) $a + \sqrt{a^2 - 2a + 1}$ b) $a^2 - \sqrt{a^4 + 9 + 6a^2}$
c) $\sqrt{4a^2 - 4a + 1} - \sqrt{4a^2}$ d) $\sqrt{0{,}25a^2} - \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} - a}$
e) $\sqrt{(-3a^2)^2} - \sqrt{81a^4 + 1 + 18a^2}$ f) $a\sqrt{0{,}64a^2} - \sqrt{0{,}64a^4 + 8a^2 + 25}$

Tüftelecke

Herr K. behauptet, beweisen zu können, dass 3 = 4 ist.

Beweis: $9 - 21 = 16 - 28$

$$9 - 21 + \frac{49}{4} = 16 - 28 + \frac{49}{4}$$

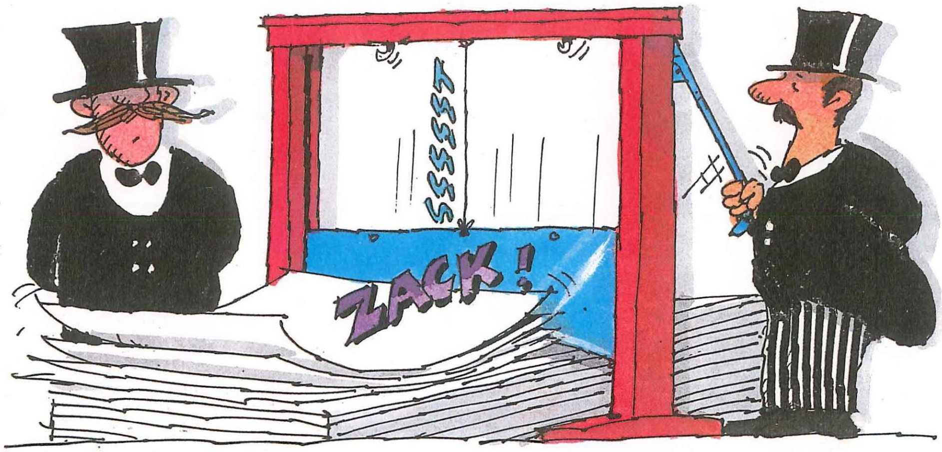
$$\left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2$$

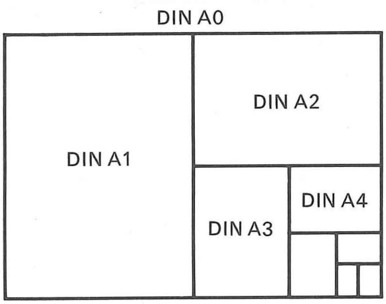
$$3 - \frac{7}{2} = 4 - \frac{7}{2}$$

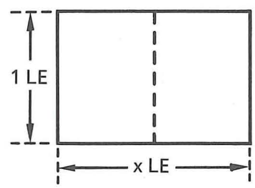
$$3 = 4$$

Wo steckt der Fehler?

§ 3 Irrationale Quadratwurzeln







DIN-Formate

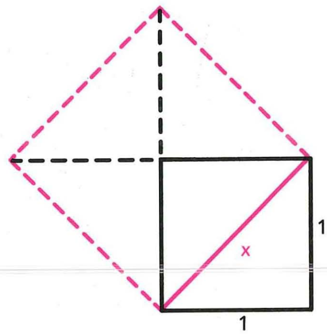
Die DIN-Rechtecke gehen durch fortgesetzte Halbierung auseinander hervor.

a) Miss Länge und Breite eines Blatts der Formate DIN A4, DIN A5 und DIN A6!

b) Damit alle DIN-Rechtecke die gleiche Form haben, ist die Länge l stets das gleiche Vielfache der Breite b. Berechne mit den Messwerten das Verhältnis $x = l : b$!

c) Um den genauen Wert für x durch Überlegung zu finden, wählen wir die Breite eines DIN-Rechtecks als 1 Längeneinheit, die Länge ist dann x Längeneinheiten. Welche Länge und welche Breite hat das folgende DIN-Rechteck? Übersetze die Bedingung, dass die Verhältnisse aus Länge und Breite der beiden Rechtecke gleich sind, in eine Gleichung! Welche rationale Zahl erfüllt diese? Vergleiche mit b)!

A. Strecken ohne rationale Längenmaßzahl

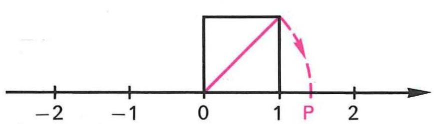


Ein Einheitsquadrat hat die Seitenlänge 1 cm. Wir interessieren uns für die Länge einer Diagonale. Um die Maßzahl x durch Überlegung zu finden, errichten wir über der Diagonale ein größeres Quadrat. Das Einheitsquadrat ist aus zwei, das Quadrat über der Diagonale aus vier untereinander kongruenten Dreiecken aufgebaut. Also ist die Maßzahl der Fläche des größeren Quadrats 2. Somit erhalten wir die reinquadratische Gleichung $x^2 = 2$. Über der Menge der rationalen Zahlen ist ihre Lösungsmenge leer. Wir kommen also zur überraschenden Erkenntnis: Die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats ist durch *keine* rationale Zahl messbar.

Die Menge der rationalen Zahlen ist unvollständig: Es gibt *nicht* für jede Länge eine rationale Maßzahl.

B. Irrationale Punkte auf der Zahlengeraden

Zur Veranschaulichung haben wir den rationalen Zahlen Punkte der *Zahlengeraden* zugeordnet. Da zwischen zwei rationalen Zahlen ihr Mittelwert liegt, gibt es zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen mindestens noch eine weitere rationale Zahl.
Da man diese Überlegung beliebig fortsetzen kann, liegen also zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen noch beliebig viele weitere rationale Zahlen. Man sagt: Die rationalen Zahlen liegen *überall dicht*.



Durch Abtragen der Diagonale des Einheitsquadrats lässt sich trotzdem auf der Zahlengeraden ein Punkt P finden, dem keine rationale Zahl zugeordnet ist. Wir nennen diesen Punkt einen nichtrationalen oder *irrationalen Punkt*. Durch wiederholtes Abtragen der Diagonale des Einheitsquadrats erhalten wir weitere irrationale Punkte.

Auf der Zahlengeraden gibt es außer den rationalen Punkten noch unendlich viele irrationale Punkte.

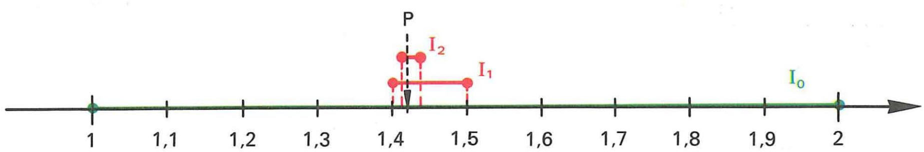
C. Der Begriff der Intervallschachtelung

Die Diagonale des Einheitsquadrats besitzt keine rationale Maßzahl. Man kann aber durch rationale Zahlen die Länge der Diagonale oder gleichbedeutend die Lage des irrationalen Punktes P auf der Zahlengeraden beliebig genau beschreiben.

Durch systematisches Probieren finden wir:

Da	liegt P im Intervall	der Länge
$1^2 < 2 < 2^2$	[1; 2]	1
$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$	[1,4; 1,5]	0,1
$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$	[1,41; 1,42]	0,01
$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$	[1,414; 1,415]	0,001
$1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2$	[1,4142; 1,4143]	0,0001
$1{,}41421^2 < 2 < 1{,}41422^2$	[1,41421; 1,41422]	0,00001
⋮	⋮	⋮

Unser Vorgehen wird an der Zahlengeraden besonders deutlich:



Wir erhalten eine Folge von Intervallen:

$$I_0 = [1; 2],\ I_1 = [1{,}4; 1{,}5],\ I_2 = [1{,}41; 1{,}42], \ldots$$

Jedes Intervall ist im vorangehenden vollständig enthalten. Man sagt: Die Intervalle sind *ineinandergeschachtelt*.

Die zugehörigen Intervallängen sind $l_0 = 1$, $l_1 = \frac{1}{10}$, $l_2 = \frac{1}{100}$, ... Jede Intervallänge beträgt $\frac{1}{10}$ der Länge des vorhergehenden Intervalls. Das n-te Intervall hat die Länge $l_n = \frac{1}{10^n}$. Mit wachsendem n wird l_n immer kleiner und kann jeden vorgegebenen Wert unterschreiten. Man sagt dann: l_n wird beliebig klein.

Definition:

> Eine Folge $I_0, I_1, I_2, \ldots$ von unendlich vielen abgeschlossenen Intervallen heißt *Intervallschachtelung*, wenn
>
> 1. jedes Intervall im vorangehenden vollständig enthalten ist und
> 2. die Länge der Intervalle mit wachsendem n beliebig klein wird.

D. Eigenschaften von Intervallschachtelungen

Man kann auch rationale Zahlen durch Intervallschachtelungen festlegen.

Beispiele:

a)	b)	c)
[0; 1]	[0; 2]	[0; 1]
[0,3; 0,4]	[0,9; 1,1]	[0,7; 1]
[0,33; 0,34]	[0,99; 1,01]	[0,97; 1]
[0,333; 0,334]	[0,999; 1,001]	[0,997; 1]
[0,3333; 0,3334]	[0,9999; 1,0001]	[0,9997; 1]
⋮	⋮	⋮

Die erste Intervallschachtelung erfasst die Zahl $\frac{1}{3}$. Die zweite und die dritte Intervallschachtelung legen die gleiche Zahl fest, nämlich 1.

Da in der Definition der Intervallschachtelung nur gefordert wird, dass die Intervalllängen beliebig klein werden, und nicht, in welcher Weise dies geschehen soll, kann man eine Zahl durch beliebig viele unterschiedliche Intervallschachtelungen festlegen.
Dagegen erfasst eine Intervallschachtelung höchstens eine Zahl.

Satz:

> Es gibt höchstens eine Zahl, die allen Intervallen einer Intervallschachtelung angehört.

Beweis: Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Zahlen a und b, die in allen Intervallen einer Intervallschachtelung liegen. Dann müssten alle Intervalle mindestens so lang wie der Abstand $|b - a|$ der beiden Zahlen sein. Das widerspricht der 2. Forderung, dass die Intervalllängen beliebig klein, also auch kleiner als $|b - a|$ werden müssen.

E. Einführung irrationaler Zahlen

Da es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat 2 ist, greift die in Abschnitt C begonnene Intervallschachtelung ins Leere: Es gibt keine rationale Zahl, die allen Intervallen angehört. Wenn die Intervallschachtelung trotzdem eine Zahl erfassen soll, muss es sich um eine neuartige – nicht rationale – Zahl handeln; man nennt sie *irrational*. Ist $\sqrt{2}$ zunächst ein Zeichen für die irrationale Maßzahl der Länge der Diagonale des Einheitsquadrats, so taucht sofort die Frage auf, wie $\sqrt{2}$ ziffernmäßig festgelegt werden kann. Aus der Intervallschachtelung von Abschnitt C ergibt sich der Anfang einer Dezimaldarstellung für $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,21\ldots$$

Dabei muss es sich um einen *unendlichen Dezimalbruch* handeln, denn alle endlichen Dezimalbrüche stellen rationale Zahlen dar.
Unendliche Dezimalbrüche treten auch bei der Umwandlung allgemeiner Brüche in Dezimalbrüche auf.

Beispiele: $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$

$\frac{1}{7} = 1 : 7 = 0{,}142\,857\,142\,857\ldots = 0{,}\overline{142\,857}$

$\frac{17}{22} = 17 : 22 = 0{,}772\,727\,272\ldots = 0{,}7\overline{72}$

Ein Bruch $\frac{p}{q}$ wird in einen Dezimalbruch verwandelt, indem man den Quotienten $p : q$ berechnet. Geht diese Division durch q nicht auf, können im äußersten Fall alle natürlichen Zahlen von 1 bis $q-1$ als Reste auftreten. Spätestens nach $q-1$ Schritten muss sich ein Rest und damit auch eine Ziffer in der Dezimaldarstellung des Quotientenwerts wiederholen: Das Ergebnis der Division ist ein *unendlicher periodischer Dezimalbruch*.

Umgekehrt kann auch jeder unendliche periodische Dezimalbruch als allgemeiner Bruch geschrieben werden.

Beispiele: $0{,}111\ldots = \frac{1}{9}$ $\qquad 0{,}555\ldots = \frac{5}{9}$

$0{,}0101\ldots = \frac{1}{99}$ $\qquad 0{,}2323\ldots = \frac{23}{99}$

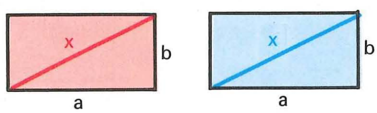
$0{,}001\,001\ldots = \frac{1}{999}$ $\qquad 0{,}123\,123\ldots = \frac{123}{999}$

Mit der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ begegnet uns somit auch in der Dezimaldarstellung etwas völlig Neuartiges: ein *unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch*.

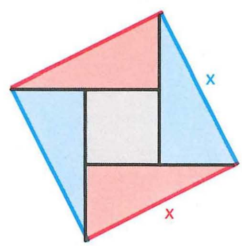
> Die *rationalen Zahlen* lassen sich durch *endliche* oder *unendliche periodische Dezimalbrüche* darstellen.
> Zahlen, die sich durch *unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche* darstellen lassen, heißen *irrationale Zahlen*.

$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$ usw. sind Zeichen für irrationale Zahlen. Ihre Dezimaldarstellungen sind unendlich und nichtperiodisch.

AUFGABEN



1. *Quadrat-Puzzle*



Ein Rechteck hat die unten angegebene Länge a und Breite b. Um die Länge x einer Diagonale durch Überlegung zu finden, bauen wir aus zwei längs der Diagonale halbierten Rechtecken und einem ergänzenden kleineren Quadrat ein Quadrat mit der Seitenlänge x zusammen. Wie groß ist aufgrund der Teilflächen der Flächeninhalt dieses Quadrats?
Welche reinquadratische Gleichung erhält man folglich für x? Bestimme, falls eine rationale Lösung existiert, diese!

a) $a = 2$ cm, $b = 1$ cm $\qquad$ b) $a = 3$ cm, $b = 1$ cm $\qquad$ c) $a = 4$ cm, $b = 3$ cm

2. Welche rationale Zahl liegt jeweils in allen Intervallen der Intervallschachtelung?

a) [0,6; 0,7]
[0,66; 0,67]
[0,666; 0,667]
[0,6666; 0,6667]
⋮

b) [1,9; 2,1]
[1,99; 2,01]
[1,999; 2,001]
[1,9999; 2,0001]
⋮

c) [1,8; 2]
[1,98; 2]
[1,998; 2]
[1,9998; 2]
⋮

3. Gib die ersten fünf Intervalle einer Intervallschachtelung an, in der die folgende rationale Zahl liegt:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{4}$

4. Bilden die folgenden Intervalle den Beginn einer Intervallschachtelung, wenn man sinngemäß fortsetzt? Begründung!

a) [0,4; 0,7]
[0,49; 0,61]
[0,499; 0,601]
[0,4999; 0,6001]
⋮

b) [2; 3]
[2,31; 2,32]
[2,3131; 2,3132]
[2,313131; 2,313132]
⋮

c) [4,4; 4,5]
[4,54; 4,55]
[4,554; 4,555]
[4,5554; 4,5555]
⋮

5. Untersuche, ob die folgenden Zahlen rational oder irrational sind:
(Hinweis: zu e), f), g): Nimm dazu an, die Zahl sei rational und führe diese Annahme zu einem Widerspruch.)

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{4}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$
e) $1+\sqrt{2}$ f) $3\cdot\sqrt{2}$ g) $1:\sqrt{2}$ h) $(\sqrt{2})^2$

6. Gib die ersten fünf Intervalle einer Intervallschachtelung für folgende Wurzeln an! Entnimm dieser jeweils den Anfang der Dezimaldarstellung!

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{4}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$

7. *Bruch- und Dezimaldarstellung rationaler Zahlen*

a) Zeige, indem du die Division durchführst:

$$\frac{1}{9}=0,\overline{1};\quad \frac{1}{99}=0,\overline{01};\quad \frac{1}{999}=0,\overline{001};\quad \frac{1}{9999}=0,\overline{0001}$$

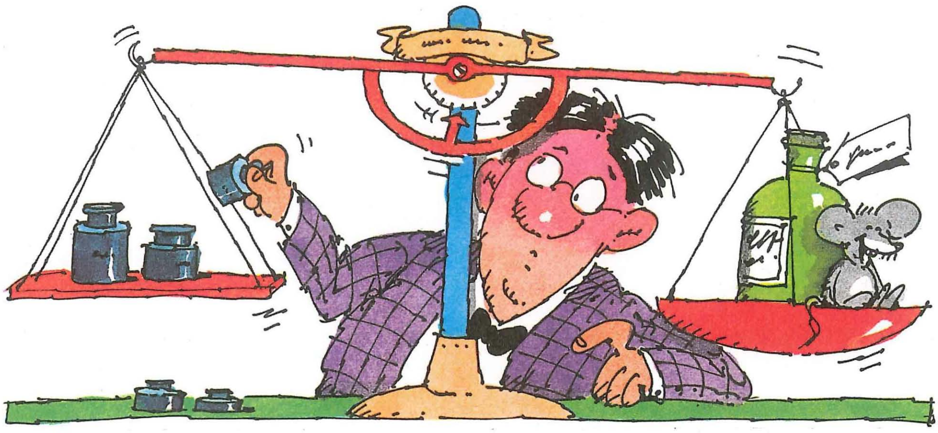
b) Wandle in Dezimalbrüche um:

$$\frac{3}{4};\ \frac{17}{50};\ \frac{7}{9};\ \frac{13}{99};\ \frac{5}{33};\ \frac{2}{11};\ \frac{23}{999};\ \frac{52}{111}$$

c) Schreibe mit Bruchstrichen:

$0,2;\quad 0,55;\quad 0,\overline{1};\quad 0,\overline{5};\quad 0,\overline{03};\quad 0,\overline{27};\quad 0,\overline{027};\quad 0,\overline{369}$

§ 4 Berechnung von Quadratwurzeln



Das Austarieren

Mit einer empfindlichen Balkenwaage und einem Wägesatz kann man die Masse eines Körpers nur dann rasch bestimmen, wenn man systematisch vorgeht.

a) Nehmen wir an, das erste aufgelegte Wägestück ist zu leicht. Warum korrigiert man kräftig und achtet darauf, dass die dann aufgelegten Wägestücke auf jeden Fall nicht zu leicht sind?

b) Nehmen wir an, man hat den Eindruck, dass das erste Wägestück viel zu leicht und die Stücke der zweiten Wägung viel zu schwer sind. Was legt man nun auf die Waagschale?

c) Wie verfährt man weiter?

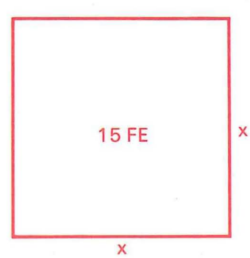
A. Das Heron-Verfahren

Ein Taschenrechner zeigt die ersten 8 bis 10 Stellen der Dezimaldarstellung einer irrationalen Quadratwurzel an.

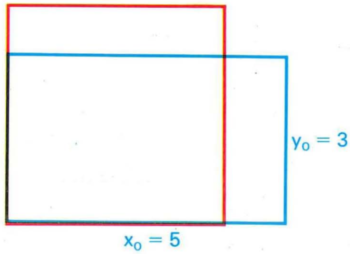
Wie berechnet er diesen *Näherungswert*? Das systematische Eingrenzen durch eine dezimale Intervallschachtelung erfordert zu viele Rechenschritte. Für das Verständnis des Rechenverfahrens des Taschenrechners fehlen uns die mathematischen Grundlagen. Aber bereits im 4. Jh. v. Chr. entwickelte der griechische Mathematiker *Eudoxos* von Knidos eine Intervallschachtelung, die schnell zum Ziel führt. Da uns das Verfahren durch *Heron* von Alexandria (1. Jh. n. Chr.) überliefert wurde, nennt man es *„Heron-Verfahren"*.

Wir klären dieses Verfahren zunächst am Beispiel $\sqrt{15}$. Geometrisch gedeutet ist es die Aufgabe, die Maßzahl x der Seitenlänge eines Quadrats vom Flächeninhalt 15 FE zu bestimmen.

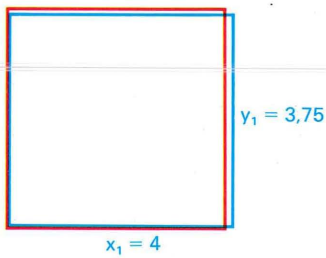
Wir nähern das Quadrat durch *flächengleiche* Rechtecke schrittweise immer besser an.



Start: Wir beginnen mit einem Rechteck der Länge $x_0 = 5$ und der Breite $y_0 = \frac{15}{5} = 3$. Der exakte Wert für $\sqrt{15}$ liegt zwischen $y_0 = 3$ und $x_0 = 5$.



1. Schritt: Da 3 zu klein und 5 zu groß ist, wählen wir als Länge x_1 des nächsten Rechtecks den Mittelwert: $x_1 = \frac{1}{2}(5 + 3) = 4$.
Die zugehörige Breite y_1 ergibt sich zu
$y_1 = \frac{15}{4} = 3{,}75$.
$\sqrt{15}$ liegt zwischen 3,75 und 4.



2. Schritt: x_2 ist der Mittelwert von x_1 und y_1.
$x_2 = \frac{1}{2}(4 + 3{,}75) = 3{,}875$

$y_2 = \frac{15}{3{,}875} \approx 3{,}870\,967.$

Die bisherigen Schritte fassen wir in einer Tabelle zusammen und setzen diese fort:

Schritt n	Länge x_n	Breite $y_n = \frac{15}{x_n}$	nächste Länge $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$	Abweichung $x_n - y_n$
0	5,000000	3,000000	4,000000	2,000000
1	4,000000	3,750000	3,875000	0,250000
2	3,875000	3,870967	3,872984	0,004033
3	3,872984	3,872982	3,872983	0,000002
4	3,872983	3,872983	3,872983	0,000000

Also: $\sqrt{15} = 3{,}872983\ldots$

B. Die Iterationsformel

Ein Berechnungsverfahren, bei dem der gleiche Rechenvorgang ständig wiederholt wird, heißt *Iterationsverfahren*[1]. Dabei wird eine zunehmend bessere Annäherung an die gesuchte Zahl erreicht.
Wir lösen uns von unserem speziellen Beispiel und übertragen die Überlegungen auf den allgemeinen Fall: Für $\sqrt{a}$ nimmt man zunächst einen Startwert x_0 an. Dann berechnet man aus a und x_0 die Breite $\frac{a}{x_0}$ des Näherungsrechtecks. Aus der Länge x_n und der Breite $\frac{a}{x_n}$ erhält man durch Mittelbildung die Länge x_{n+1} des nächsten Rechtecks:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

[1] iteratio (lat.), Wiederholung

Der exakte Wert für $\sqrt{a}$ liegt zwischen $\frac{a}{x_n}$ und x_n.

Heron-Verfahren

Nach der Wahl eines Startwertes x_0 liefert die Iterationsformel

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

immer bessere Nährungswerte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ für $\sqrt{a}$.
x_n weicht vom exakten Wert für $\sqrt{a}$ um weniger als $\left|x_n - \frac{a}{x_n}\right|$ ab.

AUFGABEN

1. Berechne mit dem Heron-Verfahren $\sqrt{2}$ auf sechs Dezimalstellen genau! Beginne mit dem Startwert:
a) $x_0 = 2$ b) $x_0 = 1$ c) $x_0 = 3$ d) $x_0 = 10$ e) $x_0 = 0{,}2$
Wie viele Schritte sind jeweils erforderlich? Welche Besonderheit liegt jeweils bei a) und b) bzw. d) und e) vor? Deute diese am Startrechteck geometrisch!

2. Berechne mit dem Heron-Verfahren nach der Wahl eines ganzzahligen Startwertes drei Schritte für $\sqrt{3}$. Wie genau ist der Näherungswert x_3 mindestens?

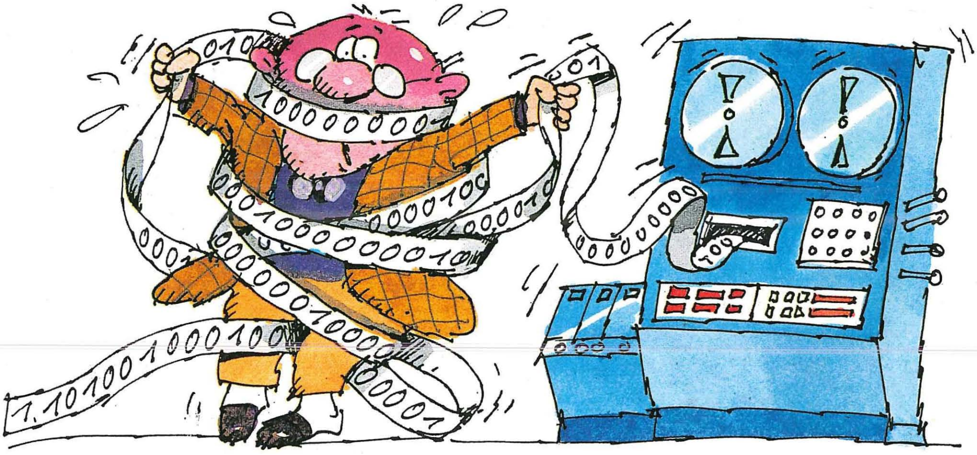
3. Berechne mit dem Heron-Verfahren auf drei Dezimalstellen genau! Starte jeweils mit einer natürlichen Zahl!
a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{3{,}6}$ e) $\sqrt{0{,}9}$

4. Berechne mit dem Heron-Verfahren vier Schritte für $\sqrt{9}$. Starte mit
a) $x_0 = 2$ b) $x_0 = 4$ c) $x_0 = 1$ d) $x_0 = 9$ e) $x_0 = 3$
Notiere das Ergebnis nach dem 3. und nach dem 4. Schritt!

5. Begründe geometrisch: Startet man mit einer viel zu großen bzw. viel zu kleinen positiven Zahl x_0, so liefert das Heron-Verfahren trotzdem nach einigen Schritten einen guten Näherungswert für die Wurzel.

6. Bei der Berechnung von Näherungswerten für eine Wurzel erhält man mit dem Heron-Verfahren $x_2 = 4$ und $x_3 = 3{,}5$. Welche Wurzel wird angenähert?

§ 5 Die reellen Zahlen



Gibt es mehr rationale oder mehr irrationale Zahlen?

Denken wir uns durch willkürliches Aneinanderreihen von Ziffern einen unendlichen Dezimalbruch gebildet! Dieser beschreibt nur dann eine rationale Zahl, wenn sich von einer bestimmten Stelle ab eine feste Ziffernfolge ständig wiederholt. Das ist aber wenig wahrscheinlich. So wird verständlich, dass es „viel mehr" nichtperiodische als periodische Dezimalbrüche und damit „viel mehr" irrationale als rationale Zahlen gibt.
Die Zahlengerade besitzt also „viel mehr" irrationale als rationale Punkte. Obwohl die rationalen Punkte überall dicht liegen, ist die Zahlengerade ohne die irrationalen Punkte „fast leer".

A. Die Menge der reellen Zahlen

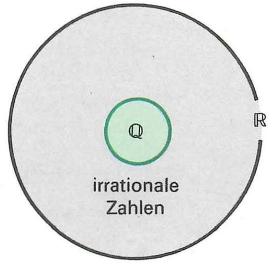
Zahlbereichserweiterungen erweisen sich in der Mathematik als sinnvoll:

- von der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen zur Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, um die Subtraktion uneingeschränkt durchführen zu können;
- von der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, um die Division uneingeschränkt durchführen zu können (abgesehen von der Division durch Null).

Die Forderung, Quadratwurzeln aus beliebigen positiven rationalen Zahlen ziehen zu können, führte uns zu den unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüchen, zu den Irrationalzahlen. Unschwer lassen sich dafür auch Beispiele angeben, die nicht aus Quadratwurzeln hervorgehen.

<u>Beispiele:</u> 1,01001000100001...
1,101001000100001...
1,201001000100001...

Es gibt „sehr viele" unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche, die keine Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen beschreiben. Die Kreiszahl $\pi = 3{,}141\,592\ldots$ ist sogar eine Irrationalzahl, die sich überhaupt nicht mithilfe von Wurzeltermen aus rationalen Zahlen ausdrücken lässt.
Die rationalen Zahlen (die endlichen und unendlichen periodischen Dezimalbrüche) und die irrationalen Zahlen (die unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüche) fasst man zu einer Menge zusammen:



Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge ℝ der *reellen*[1] *Zahlen*.

In ℝ sind u.a. alle Quadratwurzeln aus positiven rationalen Zahlen enthalten.

B. Das Rechnen mit Intervallschachtelungen

Neu eingeführte Zahlen sind erst dann mathematisch sinnvoll, wenn man mit ihnen rechnen kann. Da man beim Addieren und Multiplizieren von endlichen Dezimalbrüchen mit der letzten Stelle beginnt und unendliche Dezimalbrüche keine letzte Stelle besitzen, kann man diese Rechenverfahren nicht auf unendliche Dezimalbrüche übertragen. Wir greifen deshalb auf die Intervallschachtelungen zurück. Sowohl die rationalen als auch die irrationalen Zahlen lassen sich durch Intervallschachtelungen erfassen. Wir definieren deshalb das Rechnen mit reellen Zahlen durch das Rechnen mit Intervallschachtelungen.

Für die *Addition* liegt folgende Festsetzung nahe: Die Summe zweier Intervallschachtelungen wird berechnet, indem man die jeweiligen Intervallgrenzen addiert.

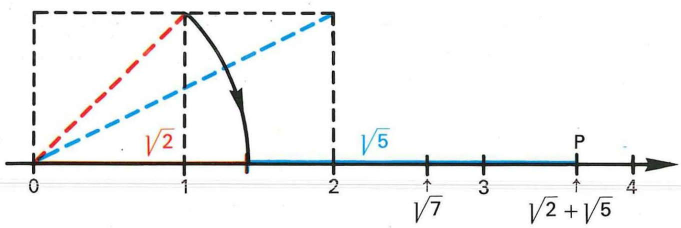
Beispiel: $\sqrt{2} + \sqrt{5} = s$. Der Wert der Summe wird mit s bezeichnet.

$$\begin{array}{ccc}
1 < \sqrt{2} < 2 & 2 < \sqrt{5} < 3 & 3 < s < 5 \\
1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 & 2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3 & 3{,}6 < s < 3{,}8 \\
1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 & 2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24 & 3{,}64 < s < 3{,}66 \\
1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 & 2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237 & 3{,}650 < s < 3{,}652 \\
1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 & 2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361 & 3{,}6502 < s < 3{,}6504 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Durch Addition entsprechender Intervallgrenzen entsteht wieder eine Intervallschachtelung. Diese bestimmt eine reelle Zahl, die Summe von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$. Der Wert dieser Summe ist nicht $\sqrt{7}$, da $2 < \sqrt{7} < 3$ ist.

[1] réel (frz.), wirklich, wahrhaft

Die Intervallschachtelung für s bestimmt auf der Zahlengeraden genau einen Punkt P. Zum gleichen Punkt kommen wir, wenn wir vom Nullpunkt aus zunächst eine Strecke der Länge $\sqrt{2}$ (Diagonale des Einheitsquadrats) und anschließend eine der Länge $\sqrt{5}$ (Diagonale eines Rechtecks mit den Seiten 2 und 1) abtragen.



Um das *Produkt* beliebiger reeller Zahlen zu bestimmen, muss man für die zugehörigen Intervallschachtelungen die Multiplikation definieren:
Das Produkt zweier Intervallschachtelungen wird berechnet, indem man die jeweiligen Intervallgrenzen multipliziert.

Beispiel: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = p$. Der Wert des Produktes wird mit p bezeichnet.

$1 < \sqrt{2} < 2$	$1 < \sqrt{3} < 2$	$1 < p < 4$
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$	$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$	$2{,}3 < p < 2{,}7$[1]
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$	$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$	$2{,}43 < p < 2{,}48$
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$	$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$	$2{,}449 < p < 2{,}453$
$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$	$1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321$	$2{,}4493 < p < 2{,}4498$
⋮	⋮	⋮

Durch Multiplikation entsprechender Intervallgrenzen der Intervallschachtelungen entsteht wieder eine Intervallschachtelung. Diese bestimmt eine reelle Zahl, das Produkt von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$. Vergleicht man die Intervallschachtelung für p mit der Intervallschachtelung für $\sqrt{6}$, so wird deutlich, dass beide denselben Punkt auf der Zahlengeraden und somit dieselbe reelle Zahl erfassen.

$$2 < \sqrt{6} < 3$$
$$2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$$
$$2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45$$
$$2{,}449 < \sqrt{6} < 2{,}450$$
$$2{,}4494 < \sqrt{6} < 2{,}4495$$
$$\vdots$$

Es gilt: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

Die Beispiele zeigen: Erfasst man reelle Zahlen durch Intervallschachtelungen, so kann man Summe und Produkt beliebiger reeller Zahlen berechnen, indem man diese Rechenoperationen mit den Intervallschachtelungen ausführt.
Auch für Intervallschachtelungen und damit für beliebige reelle Zahlen gelten die Kommutativgesetze der Addition und der Multiplikation.

[1] Bei der Berechnung der linken Intervallgrenzen wurde abgerundet, bei den rechten Intervallgrenzen wurde aufgerundet.

C. Der Körper der reellen Zahlen

Die Definition der Addition und Multiplikation reeller Zahlen, die Umkehrung dieser beiden Grundrechenarten und die grundlegenden Rechengesetze gehören zu einer vollständigen Beschreibung der Eigenschaften reeller Zahlen:

	Addition	Multiplikation
(E) Sind $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt:	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$
(K) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
(A) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:	$(a+b) + c = a + (b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(N) In $\mathbb{R}$ existiert das mit der Eigenschaft	neutrale Element 0 $a + 0 = a$	das neutrale Element 1 $a \cdot 1 = a$
(I) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es mit der Eigenschaft	ein inverses Element $-a$ $a + (-a) = 0$	ein inverses Element $\frac{1}{a}$ $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$, falls $a \neq 0$
(D) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:	$a(b + c) = ab + ac$	

Die Gesetze E–K–A–N–I–D bezeichnet man als *Körperaxiome*[1].

(E) ist das Existenzaxiom. Es fordert, dass Summe bzw. Produkt zweier reeller Zahlen wieder eine reelle Zahl ist

Die weiteren Axiome sind:

(K) die beiden Kommutativgesetze,
(A) die beiden Assoziativgesetze,
(N) die Gesetze für die Existenz der beiden neutralen Elemente,
(I) die Gesetze für die Existenz der inversen Elemente,
(D) das Distributivgesetz, welches als einziges eine Verknüpfung zwischen der Addition und der Multiplikation herstellt.

Aus der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ entsteht durch Hinzunahme der beiden Verknüpfungen Addition $(+)$ und Multiplikation $(\cdot)$ bei Gültigkeit der Gesetze E–K–A–N–I–D der *Körper der reellen Zahlen* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Beispiele: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ebenfalls ein Körper, da für die rationalen Zahlen die Gesetze E–K–A–N–I–D gelten.
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, da abgesehen von der Zahl 1 alle ganzen Zahlen bezüglich der Multiplikation keine inversen Elemente in $\mathbb{Z}$ besitzen.

Der Körper der reellen Zahlen ist ein *geordneter Körper*, d. h., für je zwei reelle Zahlen a, b gilt stets

$$\text{entweder} \quad a < b \quad \text{oder} \quad a = b \quad \text{oder} \quad a > b.$$

Es gelten folgende Ordnungsaxiome:

(O1) Wenn $a < b$ und $b < c$, dann ist $a < c$.	Transitivgesetz[2]
(O2) Wenn $a < b$, dann ist $a + c < b + c$.	Monotoniegesetz der Addition
(O3) Wenn $a < b$ und $c > 0$, dann ist $ac < bc$.	Monotoniegesetz der Multiplikation

[1] axíoma (griech.), Forderung
[2] transire (lat.), hinübergehen

Im Körper der rationalen Zahlen gelten auch diese drei Ordnungsaxiome; er ist also ebenso wie der Körper der reellen Zahlen ein geordneter Körper.
Die Entdeckung irrationaler Punkte auf der Zahlengeraden war der Anlass zur Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$. Mit den reellen Zahlen lassen sich nun allen Punkten der Zahlengeraden Zahlen zuordnen. Das ist die anschauliche Bedeutung des sog. Vollständigkeitsaxioms. Der Körper der reellen Zahlen ist im Gegensatz zum Körper der rationalen Zahlen ein *vollständiger Körper*.

> Da man jedem Punkt der Zahlengeraden eine reelle Zahl zuordnen kann, hat *jede Länge* eine *reelle Maßzahl*.

AUFGABEN

1. Berechne durch Addition bzw. Multiplikation der zugehörigen Intervallschachtelungen (von S. 25 u. S. 26):

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$ d) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$

Berechne diese Summen bzw. Produkte auch durch Addition bzw. Multiplikation vierstelliger Näherungswerte für die Quadratwurzeln!

2. Berechne:

a) $0{,}8+0{,}3$ b) $0{,}88+0{,}33$ c) $0{,}888+0{,}333$ d) $0{,}8888+0{,}3333$

Warum ist eine Berechnung der Summe $0{,}888\ldots+0{,}333\ldots$ mit dem bei a) bis d) benützten Additionsverfahren unmöglich? Welchen exakten Wert kann man trotzdem für diese Summe angeben? Warum kann man dieses Verfahren nicht auf die Berechnung von $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ übertragen?

3. Berechne:

a) $0{,}27\cdot 0{,}55$ b) $0{,}2727\cdot 0{,}5555$ c) $0{,}272\,727\cdot 0{,}555\,555$

Warum ist eine Berechnung des Produkts $0{,}2727\ldots\cdot 0{,}5555\ldots$ mit dem bei a) bis c) benützten Multiplikationsverfahren unmöglich? Welchen exakten Wert kann man trotzdem für dieses Produkt angeben? Warum kann man dieses Verfahren nicht auf die Berechnung von $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$ übertragen?

4. Berechne:

a) $0{,}7:0{,}3$ b) $0{,}77:0{,}33$ c) $0{,}777:0{,}333$ d) $0{,}7777:0{,}3333$

Wie lautet die Regel für die Division zweier endlicher Dezimalbrüche? Was müsste man demnach tun, wenn der Divisor ein unendlicher Dezimalbruch ist?

5. *Die Mittelbildung als Verknüpfung*

Die Berechnung des arithmetischen Mittels zweier reeller Zahlen a und b kann als Verknüpfung $*$ dieser Zahlen aufgefasst werden:

$a * b =$ „arithmetisches Mittel von a und b“ $= \frac{a+b}{2}$

a) Berechne:

$3*9$; $9*3$; $9*9$; $9*0$; $9*(-9)$
$(4*6)*9$; $4*(6*9)$

b) Untersuche, ob die Verknüpfung $*$ die Gesetze E–K–A–N erfüllt!

6. Die Zahl $1+\sqrt{2}$ ist irrational.
a) Untersuche, ob $1+\sqrt{2}$ Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl ist!
b) Ist jede irrationale Zahl Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl? Begründung!

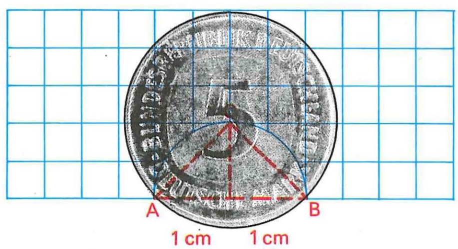
7. a) Ist $\sqrt{\sqrt{2}}$ Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl?
b) Gib eine Intervallschachtelung für $\sqrt{\sqrt{2}}$ an!
c) Ist $\sqrt{\sqrt{2}}$ eine reelle Zahl? Begründung!
d) Sind in $\mathbb{R}$ auch die Quadratwurzeln positiver irrationaler Zahlen enthalten? Begründung!

Ergänzungen und Ausblicke

Zur Geschichte der reellen Zahlen
Im 5. Jh. v. Chr. entdeckten *Pythagoras* und seine Schüler, dass sich das Längenverhältnis aus Diagonale und Seite eines Quadrats nicht durch ein Verhältnis ganzer Zahlen ausdrücken lässt. Sie nannten solche Verhältnisse „unausdrückbar" im Gegensatz zu den „ausdrückbaren". Ins Lateinische wurden diese Bezeichnungen mit „irrational" und „rational" übersetzt. Die Entdeckung „unausdrückbarer" Längenverhältnisse erregte großes Aufsehen, da sie die Harmonie zwischen Geometrie und Arithmetik zerstörte. *Eudoxos von Knidos* (408–355 v. Chr.) entwickelte ein Rechnen mit solchen Verhältnissen, das einer Theorie der Irrationalzahlen nahe kommt. Erst zu Beginn der Neuzeit haben sich die irrationalen Zahlen durchgesetzt: *Michael Stifel* (1487–1567) und *Simon Stevin* (1548–1620) versuchten sie zu definieren. Aber erst *Richard Dedekind* (1831–1916) und *Georg Cantor* (1845–1918) gelang es, befriedigende Theorien der reellen Zahlen zu entwickeln.

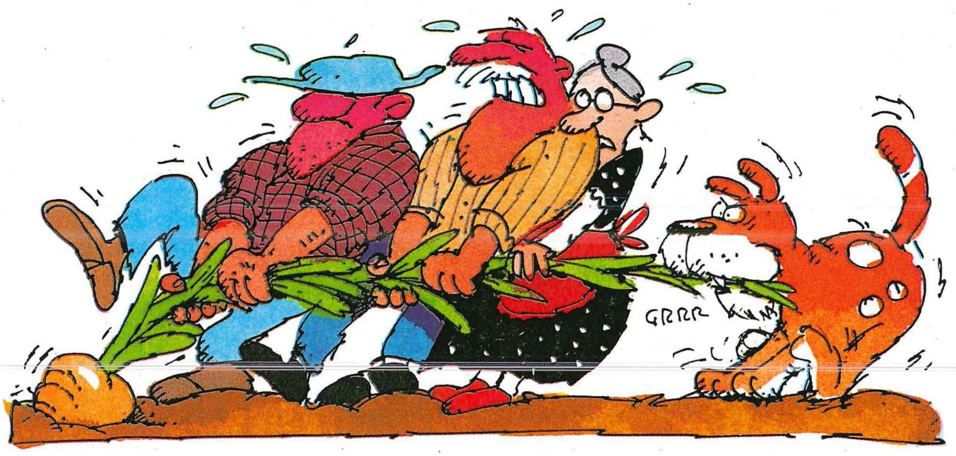
Tüftelecke

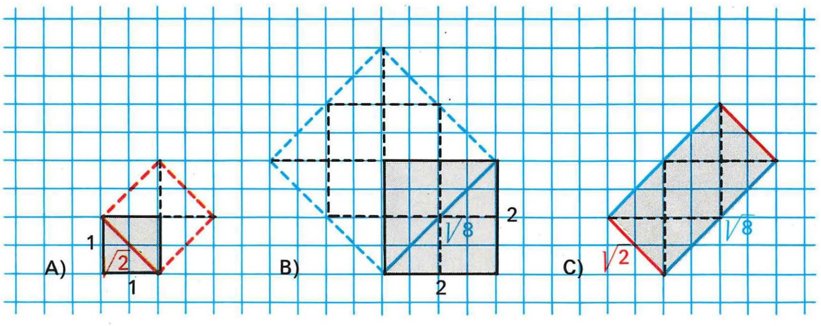
Der Elefant und das Nadelöhr
Schneide aus einem Blatt Papier ein kreisförmiges Loch vom Durchmesser 2,0 cm heraus. Ein Fünfmarkstück hat einen Durchmesser von 2,8 cm. Versuche ein Fünfmarkstück durch das Loch zu schieben!



Gelingt es nicht, lege das Papier so zusammen, dass das Loch zu einem Halbkreis an der Faltkante wird (siehe Abbildung). Wie lang sind $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$? Vergleiche mit dem Durchmesser des Fünfmarkstücks! Wie kann man folglich das Geldstück durch das Loch gleiten lassen?

§ 6 Das Rechnen mit Quadratwurzeln





Das Produkt unendlicher nichtperiodischer Dezimalbrüche

a) Begründe, dass die Diagonalen der Quadrate A) und B) die Längenmaßzahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{8}$ besitzen!

b) Warum sind die Dezimaldarstellungen von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{8}$ unendlich und nichtperiodisch?

c) Zur Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks mit den Seitenmaßzahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{8}$ müsste man zwei unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche multiplizieren: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$. Das ist aber nur näherungsweise möglich. Bestimme den exakten Flächeninhalt durch Auszählen der Rechtecksfläche C)! Welches exakte Ergebnis liefert also $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$? Schreibe dieses als Quadratwurzel!

A. Multiplikations- und Divisionsregel

Wird beim Rechnen mit irrationalen Zahlen eine gewisse Ungenauigkeit in Kauf genommen, bricht man die unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüche nach einer bestimmten Stellenzahl ab: Man ersetzt die irrationalen Zahlen durch *rationale Näherungswerte*.

Beispiele: a) $\sqrt{12} + \sqrt{3} \approx 3{,}46 + 1{,}73 = 5{,}19$, aber $\sqrt{12+3} = \sqrt{15} \approx 3{,}87$

b) $\sqrt{12} - \sqrt{3} \approx 3{,}46 - 1{,}73 = 1{,}73$, aber $\sqrt{12-3} = \sqrt{9} = 3$

c) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} \approx 3{,}46 \cdot 1{,}73 \approx 5{,}99$, und $\sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$

d) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \approx \dfrac{3{,}46}{1{,}73} = 2$, und $\sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

Interessiert der exakte Wert, muss man anstatt mit rationalen Näherungswerten mit den Wurzeltermen rechnen. Dazu benötigen wir Regeln. Summen darf man *nicht* gliedweise radizieren, Differenzen ebenfalls *nicht*. Die Beispiele lassen vermuten, dass Produkte und Quotienten dagegen gliedweise radiziert werden dürfen:

Multiplikationsregel	Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Beweis: Wir quadrieren die beiden Seiten der Gleichung.

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})\,(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b$$

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b$$

Da die Quadrate gleich sind, sind die ursprünglichen Zahlen entweder gleich oder gegengleich. Da die Wurzeln nichtnegativ sind, kann der Fall „gegengleich“ nicht auftreten.

Also: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Entsprechend lässt sich beweisen:

Divisionsregel	Für beliebige $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $b \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

B. Anwendungen

Damit alle auftretenden Wurzelterme definiert sind, setzen wir voraus, dass die Variablen nichtnegative bzw. positive reelle Zahlen vertreten.

1. *Zu einer Wurzel zusammenfassen*

   Fasst man mithilfe der Multiplikations- oder Divisionsregel mehrere Wurzelterme zu einer einzigen Wurzel zusammen, kann in besonderen Fällen die Wurzel gezogen werden.

   Beispiele: a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

   b) $\dfrac{\sqrt{a^2 b}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a^2 b}{b}} = \sqrt{a^2} = a$

2. *Teilweises Radizieren*
Spaltet man im Radikanden Quadrat-Faktoren ab, lassen sich diese radizieren. So entstehen einfachere Radikanden.

Beispiele: a) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a}$

3. *Addieren und Subtrahieren von Quadratwurzeln*
Summen und Differenzen von Quadratwurzeln lassen sich nur zusammenfassen, wenn man mithilfe des Distributivgesetzes Wurzeln mit *gleichen* Radikanden ausklammern kann.

Beispiele: a) $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (3+7) \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

b) $\sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Wurzeln mit gleichen Radikanden werden also addiert, indem man die Koeffizienten addiert und die Wurzeln beibehält.

4. *Rationalmachen des Nenners*
Ohne einen Taschenrechner erfordert die Division durch einen mehrstelligen Näherungswert für eine irrationale Quadratwurzel einen hohen Rechenaufwand. Deshalb erweitert man Brüche so, dass im Nenner eine rationale Zahl entsteht.

1. Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Tritt im Nenner eine Summe oder Differenz mit Wurzeln auf, hilft die „Plusminusformel" weiter:

2. Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{7-2} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{5}$

Wir fassen die Regeln zum Rechnen mit Quadratwurzeln zusammen:

Produkte und *Quotienten* dürfen *gliedweise radiziert* werden.
Produkte und *Quotienten* von Wurzeln können zu *einer Wurzel zusammengefasst* werden.
Summen und *Differenzen* dürfen *nicht gliedweise radiziert* werden.
Eine *Summe von Wurzeln* kann nur *zusammengefasst* werden, wenn der *gleiche Radikand* vorliegt: Dann werden die Koeffizienten addiert und die Wurzel beibehalten.

AUFGABEN

Die im Folgenden auftretenden Variablen vertreten positive reelle Zahlen. Verwende den Taschenrechner nur dann, wenn es ausdrücklich gefordert wird!

1. Fasse unter einer Wurzel zusammen und radiziere!

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$ b) $3\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{16,9} \cdot \sqrt{10}$ d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7,2}$

e) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$ g) $\frac{\sqrt{1{,}25}\cdot\sqrt{40}}{\sqrt{2}}$ h) $\sqrt{\frac{76}{135}}:\sqrt{\frac{57}{45}}$

i) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$ k) $\sqrt{b}\cdot\sqrt{b^3}$ l) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{xy^2}$ m) $\sqrt{a^3}:\sqrt{a}$

n) $\sqrt{2ac}\cdot\sqrt{\frac{8a}{c}}$ o) $\sqrt{\frac{pq}{3r}}:\sqrt{\frac{qr}{27p}}$ p) $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}$ q) $\sqrt{\frac{6{,}48u}{0{,}09vw}}:\sqrt{\frac{2w}{uv}}$

2. Radiziere!

a) $\sqrt{25\cdot 49}$ b) $\sqrt{9\cdot 169}$ c) $\sqrt{81\cdot 121}$ d) $\sqrt{64\cdot 225}$

e) $\sqrt{0{,}01\cdot 324}$ f) $\sqrt{0{,}0036\cdot 1{,}44}$ g) $\sqrt{0{,}0009\cdot 0{,}0625}$ h) $\sqrt{0{,}0049\cdot 0{,}0729}$

i) $\sqrt{9\cdot 10^2}$ k) $\sqrt{64\cdot 10^4}$ l) $\sqrt{1{,}96\cdot 10^6}$ m) $\sqrt{4{,}41\cdot 10^8}$

n) $\sqrt{25e^2f^2}$ o) $\sqrt{u^2v^4w^6}$ p) $\sqrt{\frac{x^4y^2}{484z^2}}$ q) $\sqrt{\frac{289a^2b^4}{529x^6y^8}}$

3. Radiziere!

a) $\sqrt{7\cdot 63}$ b) $\sqrt{6\cdot 10\cdot 15}$ c) $\sqrt{0{,}9\cdot 810}$ d) $\sqrt{2{,}5\cdot 10^3}$

e) $\sqrt{4{,}9\cdot 10^5}$ f) $\sqrt{12{,}1\cdot 10^9}$ g) $\sqrt{28{,}9\cdot 10^{11}}$ h) $\sqrt{3\cdot 10{,}8\cdot 10^5}$

i) $\sqrt{\frac{18}{32}}$ k) $\sqrt{\frac{6{,}4}{36{,}1}}$ l) $\sqrt{\frac{57{,}6\cdot 27}{250\cdot 48}}$ m) $\sqrt{\frac{18\cdot 98}{7{,}5\cdot 19{,}2}}$

4. Radiziere teilweise!

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{48}$ c) $2\sqrt{63}$ d) $3\sqrt{162}$

e) $5\sqrt{192}$ f) $3\sqrt{288}$ g) $2\sqrt{507}$ h) $5\sqrt{980}$

i) $\sqrt{ab^2}$ k) $\sqrt{25r^2s}$ l) $\sqrt{81a^4b^2c}$ m) $\sqrt{x^3}$

n) $\sqrt{27p^3q^2r}$ o) $\sqrt{x^2+y^2}$ p) $\sqrt{a^2x+a^2y}$ q) $\sqrt{z^3+z^2}$

r) $\sqrt{\frac{u^3v}{w^2}}$ s) $\sqrt{\frac{0{,}04u^3}{9v^5}}$ t) $\sqrt{\frac{a^3+a^2}{8b^2}}$ u) $\sqrt{\frac{54z^5+27z^4}{0{,}03y^2}}$

5. Ziehe unter das Wurzelzeichen!

a) $2\sqrt{c}$ b) $\frac{1}{5}\sqrt{d}$ c) $x\sqrt{y}$ d) $3r\sqrt{r}$

e) $-3r\sqrt{r}$ f) $y^2\sqrt{yz}$ g) $a\sqrt{b+c}$ h) $2u\sqrt{u+3v}$

i) $pq\sqrt{\frac{p}{q}}$ k) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$ l) $\frac{xy}{4z}\sqrt{\frac{16z^3}{x^2y}}$ m) $3a\sqrt{\frac{3a+1}{27a^3+9a^2}}$

6. Berechne:

a) $\sqrt{9}+\sqrt{16}-\sqrt{9+16}$

b) $\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}-\sqrt{9\cdot 16}$

c) $\sqrt{169}-\sqrt{25}-\sqrt{169-25}$

d) $\frac{\sqrt{169}:\sqrt{25}}{\sqrt{169:25}}$

e) $(\sqrt{144}\cdot\sqrt{25}-\sqrt{144\cdot 25})^2$

f) $(\sqrt{144}+\sqrt{25}-\sqrt{144+25})^2$

g) $\sqrt{1\frac{9}{16}}-\sqrt{1+\frac{9}{16}}+\sqrt{1\cdot\frac{9}{16}}$

h) $\sqrt{9\cdot\frac{25}{16}}-\sqrt{10\frac{9}{16}}+\sqrt{9+\frac{25}{16}}$

Nr. 7 bis 9: Fasse so weit wie möglich zusammen!

7. a) $5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{7}+\sqrt{7}$ c) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
d) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e) $7\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ f) $\sqrt{5}-4\sqrt{7}+4\sqrt{5}+\sqrt{7}$
g) $2\sqrt{5}-6\sqrt{2}+3\sqrt{5}+\sqrt{2}$ h) $5\sqrt{a}-4\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$
i) $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}$ k) $2\sqrt{a}+\sqrt{b}-3\sqrt{a+b}-3\sqrt{a}+3\sqrt{b}$

8. a) $\sqrt{45}+\sqrt{20}+\sqrt{5}$ b) $\sqrt{72}-\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{2}$
c) $\sqrt{2}-\sqrt{4}+\sqrt{8}-\sqrt{16}+\sqrt{32}-\sqrt{64}$ d) $\sqrt{3}-\sqrt{9}+\sqrt{27}-\sqrt{81}+\sqrt{243}-\sqrt{729}$
e) $\sqrt{75}+2\sqrt{3}-2\sqrt{27}$ f) $\sqrt{242}-\sqrt{98}+4\sqrt{8}-\frac{2}{5}\sqrt{50}-\sqrt{200}$
g) $2\sqrt{45}-4\sqrt{63}+\sqrt{245}+\sqrt{28}$ h) $\frac{7}{3}\sqrt{999}+\frac{2}{5}\sqrt{275}+\frac{3}{4}\sqrt{176}$

9. a) $a+\sqrt{a^2}$ b) $a+3\sqrt{a^2}$ c) $a\sqrt{a}+\sqrt{a^3}$
d) $a+\sqrt{a^3}$ e) $\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}$ f) $b\sqrt{2}-2\sqrt{b}+\sqrt{2b^2}$
g) $a\sqrt{b}+\sqrt{a^2b}+b\sqrt{a}+\sqrt{ab^2}$ h) $a\sqrt{a}-\sqrt{ab^2}+\sqrt{4a}+\sqrt{a^3}$
i) $x\sqrt{y}-\sqrt{x^2y^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}$ k) $2\sqrt{m^3}-3m\sqrt{m^2}+4m\sqrt{m}+5m^2$

10. Multipliziere und radiziere so weit wie möglich:
a) $(1+\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}$ b) $(\sqrt{27}-\sqrt{12})\cdot\sqrt{3}$ c) $(\sqrt{15}+\sqrt{20})\cdot\sqrt{5}$
d) $(\sqrt{150}+2\sqrt{15}-2{,}5\sqrt{24})\cdot\sqrt{6}$ e) $(7\sqrt{2}-5\sqrt{6}-3\sqrt{8}+2\sqrt{24})\cdot 3\sqrt{2}$
f) $(4-\sqrt{5})(12+3\sqrt{5})$ g) $(\sqrt{6}-\sqrt{12})(\sqrt{3}+\sqrt{6})$
h) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ i) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$
k) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$ l) $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$
m) $(1-\sqrt{2})^2$ n) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$
o) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ p) $(\sqrt{5}-1)(6+\sqrt{180})$

11. a) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})-(\sqrt{11}-\sqrt{7})^2$
c) $(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})^2-(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2$ d) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{12}-\sqrt{8})$
e) $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ f) $(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-3\sqrt{3})-(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$
g) $(\sqrt{12}-3\sqrt{27}+5\sqrt{3})^2$ h) $(2\sqrt{8}-3\sqrt{18}-2\sqrt{50})^2$

12. Berechne zuerst ohne Taschenrechner den genauen Wert und dann mit Taschenrechner einen Näherungswert:
a) $(\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{7})-(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$
b) $(2-\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})^2$
c) $(\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}+2\sqrt{5})(2\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}+\sqrt{10})^2$
d) $(\sqrt{6}-\sqrt{10})^2-2(\sqrt{6}+\sqrt{10})(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$
e) $(3\sqrt{12}-2\sqrt{2}-\sqrt{27})^2-3(2-\sqrt{6})^2$

13. a) $(\sqrt{2x}+\sqrt{3x^3})\cdot\sqrt{6x}$ b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
c) $(2\sqrt{x}-5\sqrt{y})^2$ d) $(\sqrt{p}+\sqrt{q})(\sqrt{p}-\sqrt{q})$
e) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ f) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})$

14. Vereinfache so weit wie möglich! Welche Bedingungen müssen jeweils an die Variablen gestellt werden, damit die Wurzelterme definiert sind?
a) $(1+2\sqrt{a}+a)(1-2\sqrt{a}+a)-(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})$
b) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2$
c) $(1+\sqrt{x^2+1})(1-\sqrt{x^2+1})-(1-\sqrt{x})^2$
d) $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+\sqrt{2x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-\sqrt{2x})$

15. a) $\sqrt{8+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{8-\sqrt{15}}$ b) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{6+2\sqrt{5}}$
c) $\sqrt{6-\sqrt{12}}\cdot\sqrt{9+\sqrt{27}}$ d) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}$
e) $\sqrt{x+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{y}}$ f) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}$

16. Beweise durch Termumformung:
a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$ b) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$
c) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$ d) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
e) $\sqrt{15-4\sqrt{14}}=\sqrt{8}-\sqrt{7}$ f) $\sqrt{16-4\sqrt{15}}=\sqrt{10}-\sqrt{6}$

17. Mache den Nenner rational und vereinfache so weit wie möglich!
a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{10}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{3}{2\sqrt{7}}$ d) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$
e) $\frac{4}{\sqrt{8}}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ g) $\frac{2\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ h) $\frac{3}{7}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}$
i) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$ l) $5-\frac{1}{\sqrt{5}}$
m) $\frac{21}{\sqrt{7}}-5\sqrt{7}+\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{7}}$ n) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}}$

18. Vereinfache so weit wie möglich:
a) $\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(3+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ b) $\left(\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$
c) $\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right)^2$ d) $\left(\frac{\sqrt{27}-\sqrt{8}}{\sqrt{12}}-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

19. Mache den Nenner rational!
a) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{3}+1}$ c) $\frac{6}{2-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{2}{3\sqrt{7}+4\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{2\sqrt{11}}{\sqrt{11}+4}$

g) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ h) $\dfrac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}$ i) $\dfrac{\sqrt{15}+2\sqrt{5}}{\sqrt{15}-2\sqrt{5}}$

20. Berechne zuerst ohne Taschenrechner den genauen Wert und dann mit Taschenrechner einen Näherungswert!

a) $\dfrac{25-5\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{80}}{3+\sqrt{5}}-10\sqrt{\dfrac{1}{5}}$ b) $\dfrac{12+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-6\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}-1}$

c) $\dfrac{15-7\sqrt{6}}{\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}+3}+3\sqrt{\dfrac{1}{6}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}-4}-\dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

e) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{3}{\sqrt{12}}\right)$

21. Beseitige die Wurzeln im Nenner!

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\dfrac{y}{\sqrt{y}}$ c) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

d) $\dfrac{r\sqrt{s}-s\sqrt{r}}{\sqrt{rs}}$ e) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}+1}$ f) $\dfrac{3-2\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}$

g) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a-b}}$ h) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ i) $\dfrac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$

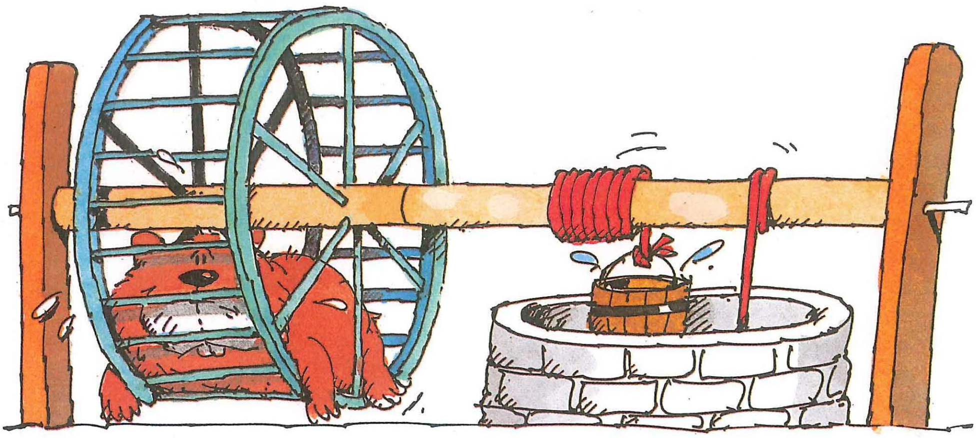
k) $\dfrac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ l) $\dfrac{4x-2\sqrt{xy}+y}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ m) $\dfrac{9a+6\sqrt{ab}+b}{\sqrt{b}+3\sqrt{a}}$

22. Vereinfache so weit wie möglich! Welche Bedingungen sind jeweils an die Variable zu stellen, damit die Terme definiert sind?

a) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2}{x-1}$ b) $\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{8\sqrt{x}}{x-4}$

c) $\dfrac{\sqrt{x-9}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x-9}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$

§ 7 Quadratische Gleichungen



Tiefe eines Brunnenschachts

Die Wülzburg bei Weißenburg verfügt über den tiefsten Festungsbrunnen Deutschlands. Zum Hochziehen eines Wasserkübels von 200 Liter Inhalt mussten im 18. Jahrhundert zwei Personen in einem Tretrad eine dreiviertel Stunde von Brett zu Brett steigen.
Ließ man einen Stein in den Brunnenschacht fallen, so hörte man den Aufschlag nach 6,0 Sekunden. Diese Zeit setzt sich aus der Fallzeit x Sekunden des Steins und der Laufzeit (6,0 – x) Sekunden des Schalls zusammen.

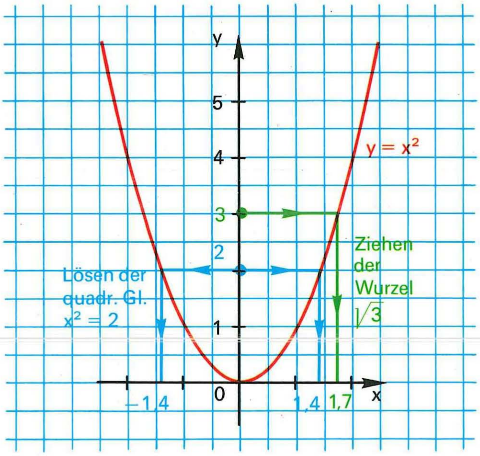
a) *Ein fallender Stein legt in der Fallzeit x Sekunden den Fallweg $5x^2$ Meter zurück. Der Schall legt dagegen in jeder Sekunde 340 Meter zurück. Gib den Term für den Schallweg in (6,0 – x) Sekunden an! Übersetze „Fallweg = Schallweg" in eine Gleichung für x!*

b) *Diese quadratische Gleichung können wir noch nicht lösen. Berechne zu den Fallzeiten 1, 2, 3, ..., 6 Sekunden jeweils den Fallweg des Steins! Berechne zu den Laufzeiten 0,1, 0,2, 0,3, ..., 1,0 Sekunden jeweils den Schallweg! Bestimme mithilfe dieser Werte die ungefähre Schachttiefe bis zum Wasserspiegel!*

A. Reinquadratische Gleichungen

Über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$ besitzt die reinquadratische Gleichung $x^2 = 2$ keine Lösungen. Legen wir dagegen die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zugrunde, hat die Gleichung die beiden Lösungen $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$.
Mithilfe der in der 8. Klasse behandelten Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ können wir reinquadratische Gleichungen auch grafisch lösen. Der Graph der Quadratfunktion, die Parabel, hat die Gleichung $y = x^2$.
Mit der Parabel (Seite 38) lässt sich die Wurzel grafisch bestimmen. Da z. B. $\sqrt{3}$ diejenige *nichtnegative* Zahl ist, deren Quadrat 3 ist, müssen wir vom y-Wert 3 nach *rechts* bis zur Parabel und dann nach unten bis zur x-Achse gehen: Dort finden wir ungefähr 1,7.

Das Lösen der reinquadratischen Gleichung $x^2 = 2$ bedeutet dagegen, dass wir *alle* Zahlen suchen, deren Quadrat 2 ist. Wir müssen also vom y-Wert 2 nach *rechts* und nach *links* gehen und finden ungefähr 1,4 und $-1{,}4$.
Es gibt keine Punkte der Parabel mit negativen y-Werten. Also hat die Gleichung $x^2 = d$ für $d < 0$ keine Lösungen.
Es gibt nur einen Punkt der Parabel mit $y = 0$; dann ist $x = 0$: Die Gleichung $x^2 = 0$ hat genau eine Lösung.
Zu jedem positiven y-Wert gibt es stets zwei Punkte der Parabel. Also hat die Gleichung $x^2 = d$ für $d > 0$ zwei Lösungen.



Falls nichts anderes angegeben ist, nehmen wir künftig als Grundmenge die Menge $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen*. Dann können wir festhalten:

Die reinquadratische Gleichung $x^2 = d$ besitzt für

$d < 0$	*keine* Lösung:	$L = \{\ \}$
$d = 0$	genau *eine* Lösung:	$L = \{0\}$
$d > 0$	*zwei* Lösungen:	$L = \{-\sqrt{d}; \sqrt{d}\}$

B. Gemischtquadratische Gleichungen

In einer quadratischen Gleichung für x kann neben x^2 auch x auftreten. Ihre *allgemeine Form* ist

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Man nennt ax^2 *quadratisches Glied*, bx *lineares Glied* und c *konstantes Glied*.
Ist $b = 0$, liegt eine reinquadratische Gleichung vor. Ist $b \neq 0$, heißt die Gleichung *gemischtquadratisch*.

Wie findet man ihre Lösungen? Wir erarbeiten ein Lösungsverfahren schrittweise.

1. Beispiel:
$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ |x-3| &= 0 \\ x &= 3 \\ L &= \{3\} \end{aligned}$$

Ist das vollständige Quadrat nicht Null, sondern eine positive reelle Zahl, folgt aus der Gleichheit der Quadrate nur die Gleichheit der Beträge der Zahlen. Die Zahlen selbst können gleich oder gegengleich sein.

2. Beispiel: $x^2 - 6x + 9 = 4$
$$
\begin{aligned}
(x-3)^2 &= 4\\
|x-3| &= 2\\
x-3 = 2 \text{ oder } x-3 &= -2\\
x = 5 \text{ oder } x &= 1\\
L &= \{1; 5\}
\end{aligned}
$$

Für das Bindewort *oder* schreibt man in der Mathematik das Zeichen $\vee$.
Ist der Term kein vollständiges Quadrat, *ergänzen* wir ihn *zu einem vollständigen Quadrat.*

3. Beispiel:
$$
\begin{aligned}
x^2 - 10x - 11 &= 0 && |+11\\
x^2 - 10x &= 11 && |\text{quadratische Ergänzung } + (\tfrac{10}{2})^2\\
x^2 - 10x + 5^2 &= 11 + 5^2\\
(x-5)^2 &= 36\\
|x-5| &= 6\\
x-5 = 6 \vee x-5 &= -6\\
x = 11 \vee x &= -1\\
L &= \{-1; 11\}
\end{aligned}
$$

Ist der Koeffizient a des quadratischen Gliedes ax^2 nicht 1, dividieren wir zunächst $ax^2 + bx + c = 0$ durch die von Null verschiedene Zahl a. So entsteht die *Normalform* $\quad x^2 + px + q = 0$

der quadratischen Gleichung.

4. Beispiel:
$$
\begin{aligned}
2x^2 + 8x - 2 &= 0 && |:2\\
x^2 + 4x - 1 &= 0 && |+1\\
x^2 + 4x &= 1 && |+2^2\\
x^2 + 4x + 2^2 &= 1 + 2^2\\
(x+2)^2 &= 5\\
|x+2| &= \sqrt{5}\\
x+2 = \sqrt{5} \vee x+2 &= -\sqrt{5}\\
x = -2+\sqrt{5} \vee x &= -2-\sqrt{5}\\
L &= \{-2-\sqrt{5}; -2+\sqrt{5}\}
\end{aligned}
$$

Lösungsschritte
Normalform herstellen
sortieren
quadratisch ergänzen
binomische Formel anwenden
Wurzel ziehen
Fallunterscheidung

Dieses Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen nennt man *Lösen durch quadratische Ergänzung.*

Die quadratische Gleichung des 4. Beispiels hat ganzzahlige Koeffizienten. Beim Einsetzen der irrationalen Lösungen muss sich also $\sqrt{5}$ wegheben.

Probe 1: $\quad 2(-2-\sqrt{5})^2 + 8(-2-\sqrt{5}) - 2 =$
$$= 2(4 + 4\sqrt{5} + 5) - 16 - 8\sqrt{5} - 2 = 18 + 8\sqrt{5} - 18 - 8\sqrt{5} = 0$$

Probe 2: $\quad 2(-2+\sqrt{5})^2 + 8(-2+\sqrt{5}) - 2 =$
$$= 2(4 - 4\sqrt{5} + 5) - 16 + 8\sqrt{5} - 2 = 18 - 8\sqrt{5} - 18 + 8\sqrt{5} = 0$$

C. Lösen durch Faktorisieren

Ist das konstante Glied $c = 0$, so lässt sich die Gleichung natürlich auch durch quadratische Ergänzung lösen.

1. Beispiel:

$$x^2 + 3x = 0 \qquad \Big| + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left|x + \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

$$x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \vee x + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$x = 0 \vee x = -3$$

$$L = \{-3; 0\}$$

Wesentlich einfacher und schneller findet man hier aber die Lösungen, wenn man den Term faktorisiert.

2. Beispiel:

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$x = 0 \;\vee\; x + 3 = 0$$

$$x = 0 \;\vee\; x = -3$$

$$L = \{-3; 0\}$$

Nicht nur im Fall $c = 0$ kann man das aufwändige Lösungsverfahren durch quadratische Ergänzung umgehen. Lässt sich ein Linearfaktor ausklammern, kommt man schneller zum Ziel.

3. Beispiel:

$$(x-3)^2 + 5(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x-3+5) = 0$$

$$x - 3 = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -2$$

$$L = \{-2; 3\}$$

AUFGABEN

1. a) $x^2 = 49$ b) $x^2 = \frac{4}{9}$ c) $x^2 = 5$
d) $x^2 = 11$ e) $x^2 = -9$ f) $x^2 = \sqrt{2}$
g) $x^2 = 0{,}9$ h) $x^2 = (-4)^2$ i) $x^2 = -(-5)^2$

2. a) $2x^2 = 1$ b) $3x^2 = 4$ c) $9x^2 = 0$
d) $50x^2 = 27$ e) $\sqrt{3}x^2 = 15$ f) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{18} = 0$
g) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{48} = 0$ h) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{27} = 0$ i) $\frac{\sqrt{3}}{12}x^2 - \frac{\sqrt{27}}{4} = 0$

3. Unter welcher Bedingung besitzt die allgemeine reinquadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ keine bzw. eine bzw. zwei Lösungen?

4. a) $(x-5)^2 = 0$ b) $x^2 + 14x + 49 = 0$ c) $x^2 - 16x + 64 = 0$
d) $x^2 - 8x = -16$ e) $6x - x^2 = 9$ f) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$

5. a) $x^2 + 10x - 96 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3 = 0$ c) $x^2 - 2x - 3 = 0$
d) $x^2 + 16x + 63 = 0$ e) $y^2 - 12y - 288 = 0$ f) $x^2 - 28x + 196 = 0$

6. a) $x^2 + 3x - 54 = 0$ b) $x^2 + 19x + 78 = 0$ c) $-x^2 + x + 90 = 0$
d) $z^2 - 23z + 90 = 0$ e) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ f) $x^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}x$

7. a) $x^2 - 2x - 1 = 0$ b) $x^2 + 6x + 7 = 0$ c) $x^2 + 8x + 16 = 0$
d) $x^2 = 4x - 1$ e) $16 - 6y = y^2$ f) $x + 1 = x^2$

8. a) $x^2 + 4x + 5 = 0$ b) $x^2 + 4x - 5 = 0$ c) $x^2 - 4x + 5 = 0$
d) $x^2 - 4x - 5 = 0$ e) $x^2 - 4x + 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 4 = 0$

9. a) $2x^2 + 2x - 60 = 0$ b) $2x^2 - 6x + 4 = 0$ c) $2x^2 + 5x + 2 = 0$
d) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ e) $3x^2 = 10x - 3$ f) $23x + 10 = 5x^2$

10. a) $x^2 - 4x = 0$ b) $3x^2 + 9x = 0$ c) $2x^2 - 5x = 0$
d) $4x^2 - 3x = 0$ e) $x^2 = x$ f) $\sqrt{8}x^2 = \sqrt{6}x$

11. a) $x(x-4) - 6(x-4) = 0$ b) $3(2x+3) - x(2x+3) = 0$
c) $2x(x-1) = 4(x-1)$ d) $(5-x)(x+1) = (5-x)(2x+5)$
e) $2x(x-3) = 3(3-x)$ f) $(2x+1)(2x-3) = (3-2x)(3x+2)$

12. a) $(x-1)^2 + (x^2-1) = 0$ b) $(x-3)^2 - 2(x^2-9) = 0$
c) $(x+1)^2 - 2(x^2+1) = 0$ d) $5(x+2)^2 - (x^2+4) = 0$
e) $(5-x)^2 = (2x-10)(x+1)$ f) $x^2 - 16 = (12-3x)(2-x)$

13. *Tiefe des Brunnenschachts der Wülzburg*

a) Stelle nach Seite 37 a) die gemischtquadratische Gleichung für die Fallzeit x Sekunden des Steins auf!

b) Berechne die Fallzeit in Sekunden auf 2 Dezimalstellen genau!

c) Berechne die Schachttiefe bis zum Wasserspiegel auf Meter genau!

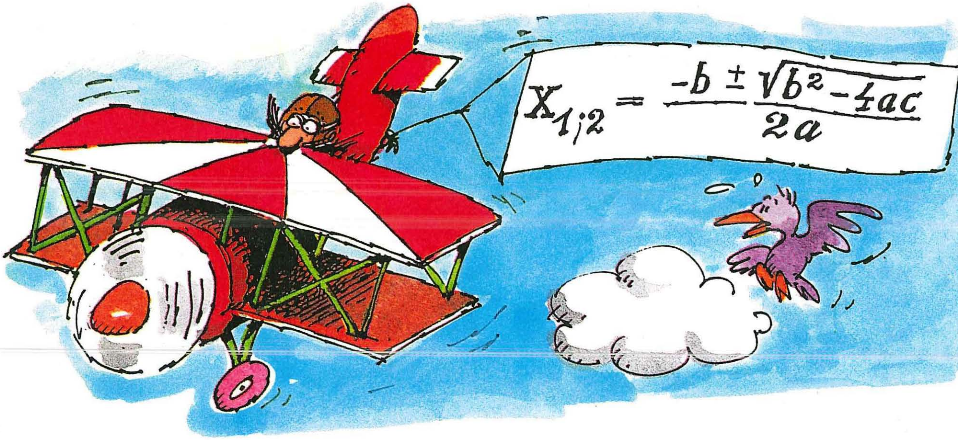
d) Nach einer historischen Quelle ist der Brunnen 481 Pariser Fuß, nach einer anderen 524 bayerische Fuß tief. Für diese veralteten Längenmaße gilt: 1 Pariser Fuß = 0,325 Meter, 1 bayerischer Fuß = 0,292 Meter. Berechne die historisch überlieferten Schachttiefen und vergleiche mit dem Wert von c)!

Ergänzungen und Ausblicke

UND- und ODER-Verknüpfung von Aussagen

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist. Verknüpft man zwei Aussagen durch das Bindewort *und*, entsteht wieder eine Aussage, z. B.:
„Heute ist Mittwoch *und* heute schneit es."
Diese Aussage ist nur dann wahr, wenn sowohl die erste Teilaussage als auch die zweite wahr ist, andernfalls ist sie falsch. In der Mathematik schreibt man für *und* das Zeichen $\wedge$.
Aussagen kann man auch durch *oder* verknüpfen, z. B.:
„Goethe ist an einem Donnerstag oder an einem Freitag geboren."
„Der Aufzug hält in jedem Stockwerk, in dem Leute ein- *oder* aussteigen wollen."
Das ODER wird hier in zwei Bedeutungen verwendet: Im ersten Beispiel in der in der Umgangssprache am häufigsten benutzten Weise im Sinn von *„entweder oder"*. Die Gesamtaussage ist genau dann wahr, wenn eine Teilaussage wahr und die andere falsch ist. Im Gegensatz dazu wird man die zweite ODER-Aussage auch dann noch als wahr bezeichnen, wenn sowohl die erste als auch die zweite Teilaussage wahr ist. ODER wird hier im Sinn von *„oder auch"* verwendet. Die in der Mathematik mit $\vee$ bezeichnete ODER-Verknüpfung ist das „einschließliche oder", das „oder auch".

§ 8 Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen



Wozu eine Formel?

Beim Lösen quadratischer Gleichungen der allgemeinen Form $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ werden immer wieder die gleichen Schritte durchlaufen: Normalform herstellen, sortieren, quadratisch ergänzen, binomische Formel anwenden, Wurzel ziehen, Fälle unterscheiden, Lösungen angeben. Führen wir dies anstatt mit Zahlen mit den Koeffizienten a, b und c aus, erhalten wir eine Formel für die Lösungen x_1 und x_2. Mit dieser Formel und dem Taschenrechner können wir dann quadratische Gleichungen mühelos lösen.

A. Die Lösungsformel

Wir gehen von der allgemeinen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ aus:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad |:a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \left| -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right.$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Nur wenn $b^2 - 4ac \geqq 0$ ist, gibt es Lösungen. Dann folgt weiter:

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{+\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Terme für die Lösungen x_1 und x_2 unterscheiden sich nur in einem Vorzeichen. Deshalb fasst man sie in einer *Lösungsformel* zusammen:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wir wenden die Formel an.

Beispiel: $32x^2 - 25{,}6x + 3{,}5 = 0$

$a = 32;\ b = -25{,}6;\ c = 3{,}5$

$$x_{1;2} = \frac{25{,}6 \pm \sqrt{25{,}6^2 - 4 \cdot 32 \cdot 3{,}5}}{2 \cdot 32}$$

$x_1 = 0{,}625;\ x_2 = 0{,}175$

Es empfiehlt sich, mit dem Taschenrechner zunächst den Wurzelterm $\sqrt{b^2 - 4ac}$ zu berechnen und ihn für die zweite Lösung zu speichern.

B. Die Diskriminante

Aus der Herleitung der Formel entnehmen wir: Der Term $b^2 - 4ac$ entscheidet, wie viele Lösungen die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ besitzt.

Definition:

> Der Term $b^2 - 4ac$ heißt *Diskriminante*[1] D der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Beispiel: $2x^2 - 5x + 4 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -7 < 0$

Die Gleichung hat keine reellen Lösungen.

2. Beispiel: $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$

Für $D = 0$ ergibt die Lösungsformel:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}$$

Im letzten Fall ist $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$. Man spricht deshalb anstatt von *genau einer Lösung* auch von *zwei zusammenfallenden Lösungen* x_1 und x_2.

[1] discriminare (lat.), trennen, unterscheiden

Satz:

Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ besitzt

keine Lösung, wenn $D < 0$ ist,
genau *eine* Lösung, wenn $D = 0$ ist,
zwei Lösungen, wenn $D > 0$ ist.

Für die Lösungen gilt: $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

C. Biquadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ heißt *biquadratisch*[1], weil sie als quadratische Gleichung in x^2 aufgefasst werden kann:

$$a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0$$

Ersetzen wir x^2 durch eine neue Variable, so können wir die biquadratische Gleichung auf eine quadratische zurückzuführen: $x^2 := u$

$$au^2 + bu + c = 0$$

Diese Einführung einer neuen Variablen heißt *Substitution*[2].

		Lösungsschritte
Beispiel:	$x^4 - 7x^2 + 12 = 0; \quad x^2 := u$	Substitutieren
	$u^2 - 7u + 12 = 0$	quadratische Gleichung lösen
	$u = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2}$	
	$u = \dfrac{7 \pm 1}{2}$	
	$u = 4 \vee u = 3$	Substitution rückgängig machen
	$x^2 = 4 \vee x^2 = 3$	
	$x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$	
	$L = \{2; -2; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$	

AUFGABEN

1. Berechne die Lösungen mit der Formel!

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ b) $10x^2 + 11x + 3 = 0$ c) $3x^2 + 8x - 3 = 0$

d) $5x^2 - 8x - 21 = 0$ e) $-15x^2 - 19x + 56 = 0$ f) $20x^2 - 7x - 6 = 0$

2. a) $0{,}2x^2 + 1{,}6 = 1{,}14x$ b) $0{,}5x^2 + 0{,}15x = 0{,}27$ c) $0{,}7x^2 + 0{,}9x = 1$

d) $3v^2 + 4{,}2 = 8{,}8v$ e) $4x^2 = 8x + 1$ f) $24x + 19 = 18x^2$

[1] bis (lat), zweimal [2] substituere (lat.), ersetzen

3. Multipliziere zunächst jede Gleichung mit einer Zahl, sodass alle Koeffizienten ganzzahlig werden! Berechne dann die Lösungen!

a) $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$ b) $z^2 + \frac{7}{4}z - \frac{15}{8} = 0$ c) $u^2 - \frac{3}{20}u - \frac{1}{100} = 0$

d) $2v^2 = \frac{1}{3}v + \frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{80} = \frac{1}{3}t^2 + \frac{7}{120}t$ f) $\frac{8}{7}y^2 = \frac{7}{5}y + \frac{1}{7}y^2$

4. Bestimme die Anzahl der Lösungen mithilfe der Diskriminante!

a) $x^2 + 12x + 38 = 0$ b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ c) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

d) $5x^2 - 16x + 13 = 0$ e) $7x^2 - 2x - 11 = 0$ f) $12x^2 + 60x + 75 = 0$

5. a) Wie lautet die Diskriminante D für die Normalform $x^2 + px + q = 0$ der quadratischen Gleichung?

b) Begründe: Ist $q < 0$, so gibt es stets zwei Lösungen.

6. a) $x^2 - \sqrt{12}x + 3 = 0$ b) $x^2 + 10 = \sqrt{45}x$ c) $\sqrt{8}x - x^2 = 1$

d) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3} = 3x$ e) $\sqrt{24}x = 2x^2 + 3$ f) $14x + 2\sqrt{7} = \sqrt{7}x^2$

7. a) $2x(x+3) - x(x-1) + 6 = 0$ b) $(4-x)^2 + (2x-1)^2 = 10$

c) $(x-5)(2x-17) - (x-7)(3x+1) = 84$ d) $(2x-3)(3x-2) - (3x-1)^2 = 10$

8. *Bilder ohne und mit Rahmen*

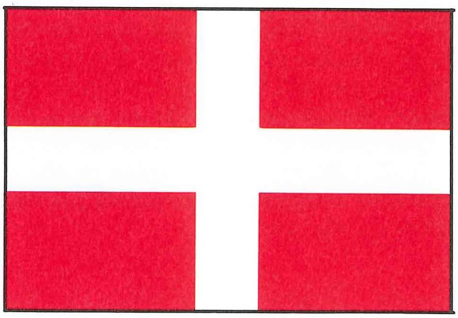
a) Ein rechteckiges Bild vom Flächeninhalt 875 cm² ist 10 cm länger als breit. Wie lang und wie breit ist das Bild?

b) Ein rechteckiges Bild ist mit Rahmen 80 cm lang und 60 cm breit. Peter schätzt, dass der übergroße Rahmen den gleichen Flächeninhalt wie das Bild hat. Wie breit müsste dann der Rahmen sein?

c) Ein rechteckiges Bild ist mit Rahmen 55 cm lang und 40 cm breit. Der Rahmen hat den Flächeninhalt 850 cm². Wie breit ist der Rahmen?

9. *Der Danebrog*

Die dänische Nationalflagge, der Danebrog, zeigt ein weißes Kreuz auf rotem Grund. Wie breit müssen die weißen Streifen auf einem rechteckigen Fahnentuch von 3 m Länge und 2 m Breite gewählt werden, wenn das Kreuz gerade ein Drittel der Rechtecksfläche bedecken soll?



10. Gib über der Grundmenge $\mathbb{R}$ die Definitionsmenge D an! Bestimme die Lösungsmenge!

a) $2x + \frac{1}{x} = 3$ b) $\frac{5-3x}{1+x} + \frac{3}{x} = 4$

c) $\frac{x}{5-2x} + \frac{1}{3-2x} = 1$ d) $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{22-7x}{2-x} = \frac{4x-2}{x^2-4}$

e) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} = 2 \cdot \frac{1-x}{x-2}$ f) $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{1-x} = \frac{2}{x^2-1}$

g) $\frac{3x}{x-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{6}{x^2-1}$ h) $\frac{5+x}{3-x} - \frac{2x}{x-2} = \frac{8-3x}{x}$

11. a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ b) $z^4 - 9z^2 + 20 = 0$
c) $16x^4 - 136x^2 + 225 = 0$ d) $6y^4 - 5y^2 + 1 = 0$
e) $x^4 + 2x^2 - 35 = 0$ f) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

12. Führe zuerst eine geeignete Substitution durch!
a) $(x^2 - 9)^2 + 5(x^2 - 9) = 0$ b) $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
c) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 5 = 7\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ d) $(2x^2 - 5x)^2 + 4x^2 = 10x + 3$

13. Führe die folgenden Wurzelgleichungen zuerst durch eine geeignete Substitution auf quadratische Gleichungen zurück!
a) $x - 8\sqrt{x} + 15 = 0$ b) $x - 6\sqrt{x} + 4 = 0$
c) $x + 2\sqrt{x} - 24 = 0$ d) $\sqrt{x} - 29 = \frac{30}{\sqrt{x}}$

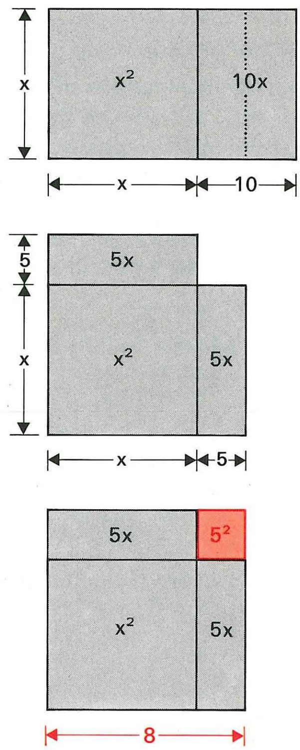
Ergänzungen und Ausblicke

Das geometrische Lösungsverfahren des al-Chwarismi

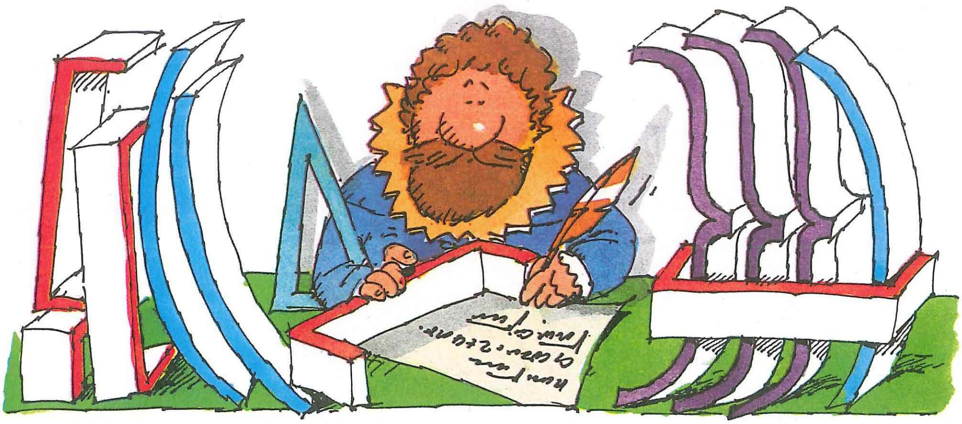
Zur Zeit ihres berühmten Mathematikers *Muhammed ibn Musa al-Chwarismi* (783 bis 850 n. Chr.) benutzten die Araber noch keine negativen Zahlen. Negative Lösungen quadratischer Gleichungen gab es deshalb nicht.
Wenden wir uns einem Beispiel al-Chwarismis zu:

$$x^2 + 10x = 39$$

Geometrisch gedeutet ist es die Aufgabe, die Seitenlänge x eines Quadrats zu bestimmen, das zusammen mit einem Rechteck der Länge 10 und der Breite x den Flächeninhalt 39 besitzt. Al-Chwarismi halbierte das Rechteck: Die beiden neuen Rechtecke der Länge 5 und der Breite x setzte er unmittelbar an das Quadrat an. Nun ergänzte er die Figur durch ein kleines Quadrat mit dem Flächeninhalt 5^2 zu einem großen Quadrat. Dieses hat folglich den Flächeninhalt $39 + 25 = 64$. Also besitzt es die Seitenlänge 8. Die gesuchte Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats beträgt somit $x = 8 - 5 = 3$.



§ 9 Der Satz von Vieta



François Viète, *latinisiert* Vieta *(geb. 1540 in Fontenay-le-Comte, gest. 1603 in Paris) führte in die Algebra das durchgängige Rechnen mit Buchstaben und Rechenzeichen ein. Dabei benützte er auch runde, eckige und geschweifte Klammern. Er erkannte, dass die mathematischen Überlegungen durch den Gebrauch von Symbolen wesentlich übersichtlicher wurden.*

Einer der elementaren Lehrsätze der Algebra ist der von Vieta gefundene und nach ihm benannte Satz. Dieser gibt einen Zusammenhang zwischen den Lösungen x_1 und x_2 und den Koeffizienten p und q der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ an.

a) *Berechne die Lösungen x_1 und x_2 der folgenden Gleichungen!*

$x^2 + px + q = 0$	p	q	x_1	x_2
$x^2 - 5x + 6 = 0$	-5	6		
$x^2 - 8x + 15 = 0$	-8	15		
$x^2 + 8x + 15 = 0$	8	15		
$x^2 - 2x + 15 = 0$	-2	15		
$x^2 + 2x - 15 = 0$	2	-15		

b) *Welcher Zusammenhang besteht vermutlich zwischen x_1, x_2 und p, welcher Zusammenhang zwischen x_1, x_2 und q?*

A. Der Satz von Vieta

Die Lösungsformel gibt an, wie sich aus den Koeffizienten der quadratischen Gleichung die Lösungen berechnen lassen. Wie kann man umgekehrt eine Gleichung in der Normalform aufstellen, welche die vorgegebenen Lösungen x_1 und x_2 hat?

Diese Frage beantwortet der

Satz von Vieta:

Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Beweis: Mithilfe der Lösungsformel folgt:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-p + \sqrt{p^2 - 4q})\,(-p - \sqrt{p^2 - 4q})}{2 \cdot 2} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = q$$

Das Aufstellen einer Gleichung mit gegebenen Lösungen ist also einfach.

Beispiel: $x_1 = 6$, $x_2 = 0{,}5$
Es ist $p = -(x_1 + x_2) = -6{,}5$ und $q = x_1 \cdot x_2 = 3$.
Folglich lautet die Gleichung $x^2 - 6{,}5x + 3 = 0$.

Falls in einer gegebenen Gleichung die Koeffizienten p und q ganze Zahlen sind, kann man eventuell vorhandene ganzzahlige Lösungen x_1 und x_2 durch *systematisches Probieren* finden.

Beispiel: $x^2 + x - 6 = 0$
Da $q = x_1 \cdot x_2$ ist, gibt es folgende ganzzahlige Möglichkeiten:
$-6 = 1 \cdot (-6) = (-1) \cdot 6 = 2 \cdot (-3) = (-2) \cdot 3$
Da ferner $x_1 + x_2 = -1$ ist, sind $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ die Lösungen.

B. Der Zerlegungssatz

Ein Term der Form $ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ heißt quadratisches *Polynom*[1] in x. Wir können ein quadratisches Polynom faktorisieren, wenn eine binomische Formel anwendbar ist.

Beispiel: $x^2 - 9 = (x + 3)\,(x - 3)$

Lassen sich auch andere quadratische Polynome faktorisieren?
Besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so folgt:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2 = && \text{(Satz von Vieta)} \\ &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = && \text{(Ausmultiplizieren)} \\ &= x\,(x - x_1) - x_2\,(x - x_1) = && \text{(Ausklammern)} \\ &= (x - x_1)\,(x - x_2) && \text{(Ausklammern)} \end{aligned}$$

[1] polýs (griech.), viel; Polynom: vielgliedriger Ausdruck.

Es ist uns gelungen, das Polynom $x^2 + px + q$ in Faktoren zu zerlegen. $x - x_1$ und $x - x_2$ nennt man *Linearfaktoren*.
Setzt man in das Polynom $x^2 + px + q$ für x die Lösung x_1 oder die Lösung x_2 ein, erhält man Null. Ein Produkt nimmt nur dann den Wert Null an, wenn mindestens ein Faktor Null ist; für $x = x_1$ oder $x = x_2$. So wird verständlich, dass in der Faktorzerlegung die Terme $x - x_1$ und $x - x_2$ auftreten.
Liegt ein allgemeines quadratisches Polynom $ax^2 + bx + c$ vor, muss man zuerst a ausklammern und dann entsprechend vorgehen. Also:

> *Zerlegungssatz*
>
> Besitzt die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt: $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Jetzt können wir auch quadratische Polynome faktorisieren, wenn die zugehörige Gleichung Lösungen besitzt.

Beispiel: $2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2 + x - 6)$
$= 2(x - 2)(x + 3)$
(Lösungen nach Vieta: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$)

AUFGABEN

1. Gib jeweils die Normalform der quadratischen Gleichung an, die folgende Lösungen besitzt:
a) 3 und 7 b) 3 und -7 c) -3 und 7
d) -3 und -7 e) -3 und 0 f) 3 und 3
g) -3 und -3 h) 3 und -3 i) $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$
k) $2 + \sqrt{3}$ und $2 - \sqrt{3}$ l) $7 + 4\sqrt{3}$ und $7 - 4\sqrt{3}$ m) $-7 - 5\sqrt{2}$ und $-7 + 5\sqrt{2}$
n) $\sqrt{3} + 2$ und $\sqrt{3} - 2$ o) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ und $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ p) $1 - \sqrt{2}$ und $2 + \sqrt{2}$

2. Die *Vieta-Probe*
Überprüfe mithilfe des Satzes von Vieta, ob die angegebene Menge die Lösungsmenge der Gleichung ist! Berichtige, falls erforderlich, die Lösungsmenge!
a) $x^2 + 5x + 6 = 0$; $\{2; 3\}$ b) $x^2 - 3{,}5x - 7{,}5 = 0$; $\{-1{,}5; 5\}$
c) $x^2 - 0{,}5x - 7{,}5 = 0$; $\{2{,}5; -3\}$ d) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{18} = 0$; $\{-\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}\}$

3. Versuche, die Lösungen mithilfe des Satzes von Vieta zu finden!
a) $x^2 - 9x + 20 = 0$ b) $x^2 + 9x + 20 = 0$ c) $x^2 - x - 20 = 0$
d) $x^2 + x = 20$ e) $x^2 - 17x + 70 = 0$ f) $x^2 - 11x - 26 = 0$
g) $x^2 + 2x - 24 = 0$ h) $x^2 + 5x - 6 = 0$ i) $x^2 - 4x + 5 = 0$

4. Wie lauten die Formeln des Satzes von Vieta für die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$ der quadratischen Gleichung?

5. Versuche die Lösungen mithilfe des Satzes von Vieta zu finden!
a) $2x^2 + 32x + 96 = 0$ b) $3x^2 + 15x = 108$ c) $0{,}5x^2 - 1{,}5x = 9$
d) $5x^2 + 7x = 0$ e) $49x^2 - 21x + 2 = 0$ f) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

6. Bestimme die zweite Lösung und den fehlenden Koeffizienten!

a) $x^2 + 15x + q = 0;\ x_1 = -18$
b) $x^2 - 6x + q = 0;\ x_1 = 3 + \sqrt{5}$
c) $x^2 + px + 12 = 0;\ x_1 = -5 - \sqrt{13}$
d) $ax^2 + 11x - 35 = 0;\ x_1 = -\frac{7}{2}$

7. Zerlege folgende Polynome so weit wie möglich in Faktoren!

a) $x^2 - 13x + 42$
b) $x^2 - 15x - 76$
c) $x^2 + 21x + 108$
d) $x^2 + 0{,}2x - 0{,}24$
e) $x^2 - 8x + 9$
f) $x^2 + 9x + 9$
g) $5x^2 + 8x - 21$
h) $30x^2 - 11x - 30$
i) $2x^2 - 6x + 3$

8. Bestimme die Definitionsmenge D (Grundmenge $\mathbb{R}$). Kürze vollständig!

a) $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 25}$
b) $\dfrac{z^2 - 16}{z^2 + z - 20}$
c) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$
d) $\dfrac{x^2 + 3x - 18}{x^2 - 6x + 9}$
e) $\dfrac{6x^2 - 12x - 18}{3x^2 - 12x + 9}$
f) $\dfrac{4x^2 + 4x - 3}{4x^2 + 2x - 6}$

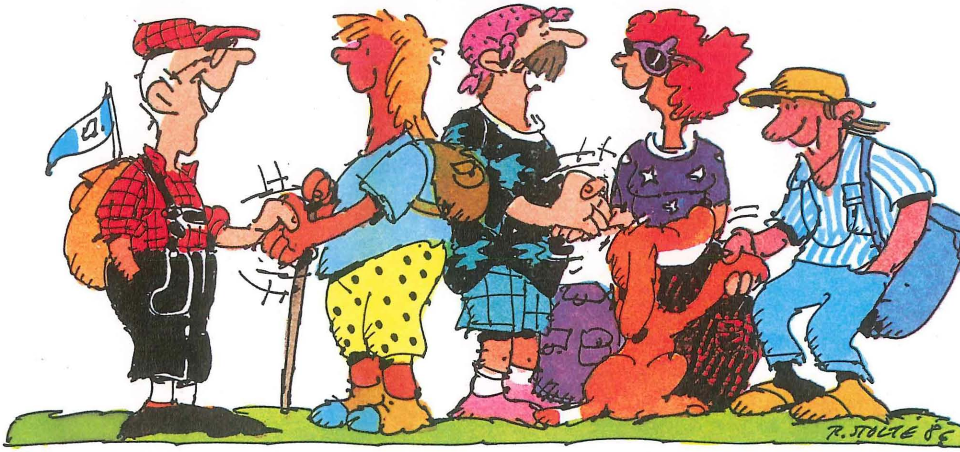
9. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge (Grundmenge $\mathbb{R}$)!

a) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = 2$
b) $\dfrac{5x}{x^2 + 3x + 2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{1 + x}$
c) $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{x + 5}{x - 3}$
d) $\dfrac{x}{x - 2} + \dfrac{x}{x + 3} + \dfrac{x - 12}{x^2 + x - 6} = 0$

Tüftelecke

Begründe den *Satz*:
Hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ganzzahlige Koeffizienten p, q und zwei Lösungen, und ist ferner eine Lösung eine ganze Zahl, so ist auch die andere eine ganze Zahl.

§10 Textaufgaben



Begrüßung

An einer Wanderung nehmen 15 Personen teil. Zu Beginn begrüßt jeder Teilnehmer jeden anderen mit „Guten Morgen" und durch Händeschütteln.

a) Wie oft sagt eine Person „Guten Morgen"? Wie oft wird der Gruß insgesamt ausgesprochen?

b) Wie oft werden insgesamt Hände geschüttelt?

Wir verallgemeinern: Die Anzahl der Teilnehmer sei x.

c) Wie oft sagt eine Person „Guten Morgen"? Wie oft wird der Gruß insgesamt ausgesprochen?

d) Wie oft werden insgesamt Hände geschüttelt?

A. Denksportaufgaben

Der besondere Reiz von Denksportaufgaben liegt häufig darin, dass man zu gewöhnlichen Situationen ungewöhnliche Fragen stellt.

Beispiel: Bei einer Feier stoßen alle Teilnehmer miteinander an. Man hört die Gläser 66-mal klingen. Wie viele Personen nehmen an der Feier teil?

Lösung: x ist die Anzahl der Teilnehmer.
Jede Person hebt $(x-1)$-mal ihr Glas, um mit einer anderen Person anzustoßen. Insgesamt werden also $x(x-1)$ Gläser gehoben. Da zwei angehobene Gläser beim Zusammenstoßen nur einen Klang erzeugen, erklingt es nur halb so häufig, also $\frac{x(x-1)}{2}$-mal.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \qquad | \cdot 2 \qquad G = \mathbb{N}$$

$$x^2 - x = 132$$

$$x^2 - x - 132 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 132}}{2} = \frac{1 \pm 23}{2}$$

$$x_1 = 12; \; (x_2 = -11)$$

Antwort: An der Feier nehmen 12 Personen teil.

Probe: Jede Person hebt 11-mal ihr Glas. Insgesamt werden also $12 \cdot 11$ Gläser gehoben. Diese erklingen $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$-mal.

B. Bestimmen von Zahlen

Die dezimale Schreibweise der Zahlen stützt sich darauf, dass jede Stelle einen bestimmten Wert hat. Zum Beispiel bedeutet 74 ausführlich geschrieben

$$74 = 7 \cdot 10 + 4 \cdot 1 .$$

Sind in einer Aufgabe die Ziffern einer mehrstelligen Zahl gesucht, muss man von dieser Eigenschaft des Zehnersystems Gebrauch machen. Vertritt x die Zehnerziffer und y die Einerziffer einer zweistelligen Zahl, so erfasst der Term

$$x \cdot 10 + y \cdot 1$$

die Zahl.

Die Quersumme dieser Zahl, d.h. die Summer ihrer Ziffern, ist $x + y$.

Nun zu einer entsprechenden Aufgabe!

Beispiel: Welche zweistellige Zahl, deren Einerziffer um 7 kleiner als die Zehnerziffer ist, ist gleich dem Quadrat ihrer Quersumme?

Lösung: x ist die Zehnerziffer.

	Term
Zehnerziffer	x
Einerziffer	$x - 7$
Zahl	$x \cdot 10 + (x - 7) = 11x - 7$
Quersumme	$x + (x - 7) = 2x - 7$

$$11x - 7 = (2x - 7)^2 \qquad G = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$$

$$11x - 7 = 4x^2 - 28x + 49$$

$$4x^2 - 39x + 56 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{39 \pm \sqrt{39^2 - 16 \cdot 56}}{8} = \frac{39 \pm 25}{8}$$

$$x_1 = 8; \quad (x_2 = \tfrac{7}{4})$$

Antwort: Die Zahl ist 81.

Probe: $(8 + 1)^2 = 81$

AUFGABEN

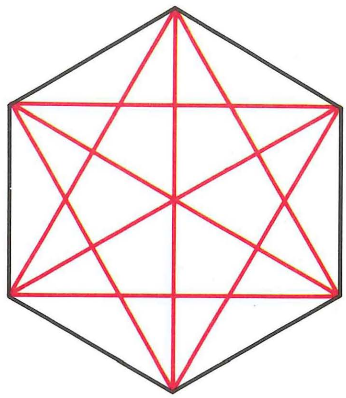
1. *Begrüßung*

a) Zu Beginn einer Wanderung begrüßt jeder Teilnehmer jeden anderen mit „Guten Morgen". Dieser Gruß wird insgesamt 272-mal ausgesprochen. Wie viele Personen nehmen an der Wanderung teil?

b) Zu Beginn eines Tischtennis-Turniers schütteln sich die Spieler gegenseitig die Hände. Es werden insgesamt 120-mal Hände geschüttelt. Wie viele Spieler nehmen am Turnier teil?

2. *Ligastärke*

a) Jede Mannschaft einer Fußballiga bestreitet gegen jede andere Mannschaft ein Hin- und ein Rückspiel. Es finden insgesamt 306 Spiele statt. Aus wie vielen Mannschaften besteht die Liga?



b) Jede Mannschaft einer Fußballiga bestreitet in der Vorrunde gegen jede andere Mannschaft ein Spiel. Es finden in der Vorrunde insgesamt 190 Spiele statt. Aus wie vielen Mannschaften besteht die Liga?

3. *Diagonalen*

a) Ein konvexes[1] Vieleck hat 104 Diagonalen. Wie viele Ecken besitzt es?

b) Ein konvexes Vieleck hat 12 Diagonalen mehr als Seiten. Wie viele Ecken besitzt es?

4. *Primzahlzwillinge*

Zwei Primzahlen, von denen eine um 2 größer ist als die andere, heißen Primzahlzwillinge. Gibt es mit folgender Eigenschaft jeweils Primzahlzwillinge?

a) Ihr Produkt ist 399.

b) Ihr Produkt ist um 119 größer als ihre Summe.

c) Das Quadrat ihrer Summe ist um 198 größer als die Summe ihrer Quadrate.

5. *Kehrwerte*

a) Die Summe der Kehrwerte zweier aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist $\frac{9}{20}$. Wie heißen die Zahlen?

b) Die Summe zweier Zahlen ist 3, die Differenz ihrer Kehrwerte $\frac{1}{2}$. Wie lauten die Zahlen?

c) Welche Zahl ist um 1 größer als ihr Kehrwert?

6. *Quersumme*

a) Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 2 kleiner als die Zehnerziffer. Multipliziert man die Zahl mit ihrer Quersumme, so erhält man 900. Wie lautet die Zahl?

b) Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 4 kleiner als die Zehnerziffer. Die Zahl ist um 15 größer als das Quadrat ihrer Quersumme. Wie heißt die Zahl?

c) Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 2 größer als die Zehnerziffer. Dividiert man die Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man die Einerziffer. Wie lautet die Zahl?

[1] jeder Innenwinkel kleiner als 180°; convexus (lat.), gewölbt, gerundet

7. *Spiegelzahl*

Kehrt man die Reihenfolge der Ziffern einer Zahl um, so entsteht ihre Spiegelzahl.

a) Eine zweistellige Zahl besitzt die Quersumme 9. Multipliziert man die Zahl mit ihrer Spiegelzahl, so erhält man 1944. Bestimme alle Zahlen mit diesen Eigenschaften!

b) Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 1 kleiner als die Zehnerziffer. Subtrahiert man von der Zahl ihre Spiegelzahl, so erhält man das Quadrat der Quersumme der Zahl. Wie heißt die Zahl?

c) Die Zehnerziffer einer dreistelligen Zahl ist um 3 größer als die Einerziffer. Die Zahl ist gleich ihrer Spiegelzahl. Dividiert man die Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man das 14fache der Hunderterziffer. Wie lautet die Zahl?

8. *Satz von Pythagoras*

a) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die größere Kathete um 1 cm kürzer als die Hypotenuse und um 17 cm länger als die kleinere Kathete. Wie lang sind die Seiten?

b) Ein rechtwinkliges Dreieck besitzt den Umfang 30 cm. Die Hypotenuse ist 8 cm länger als eine der beiden Katheten. Wie lang sind die Seiten?

c) Ein Rechteck hat den Umfang 46 cm. Seine Diagonale ist 17 cm lang. Wie lang sind die Seiten?

d) Der Umfang eines Rechtecks beträgt 82 cm. Die Diagonale ist 9 cm länger als eine der beiden Seiten. Wie lang sind die Seiten?

9. *Bewegungsaufgaben*

a) Ein Lastkraftwagen benötigte für eine 150 km lange Strecke 3 Stunden. Dabei konnte er auf den ersten 90 km seine normale Durchschnittsgeschwindigkeit einhalten. Auf der Reststrecke musste er wegen schlechter Beschaffenheit der Straße diese Geschwindigkeit um 20 km/h herabsetzen. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erzielte der Lkw auf der ersten Teilstrecke?

b) Als es noch keine Schleusen auf der Donau gab, benötigte ein Donaudampfschiff für die 91 km lange Fahrt von Passau nach Linz und die anschließende Rückfahrt insgesamt 11,5 Stunden. Die Driftgeschwindigkeit[1] der Donau betrug 2,5 km/h. Wie groß war die Eigengeschwindigkeit des Schiffes? Wie lang benötigte es von Passau nach Linz und wie lang von Linz nach Passau?

c) Für eine 18 km lange Strecke benötigt ein Radfahrer $2\frac{2}{3}$ Stunden weniger als ein Fußgänger, da die Geschwindigkeit des Radfahrers um 9 km/h größer ist als die des Fußgängers. Wie groß sind die Geschwindigkeiten?

d) Ein Schiff benötigt für eine 5250 m lange Strecke flussaufwärts 6 Minuten länger als flussabwärts. Die Driftgeschwindigkeit[1] beträgt 3 km/h. Wie lang braucht das Schiff für die Fahrt flussaufwärts, wie lang für die Fahrt flussabwärts? Wie lang würde das Schiff auf einem See für eine $2 \cdot 5250$ m lange Strecke benötigen?

10. *Oldtimer-Dampflok*

Bei einer Dampflok der Baureihe 38 ist der Umfang des Treibrades um 236 cm größer als der des Laufrades. Deshalb muss sich auf einer Strecke von 3,665 km das kleinere Rad gerade 500-mal mehr drehen als das größere. Berechne den Umfang der Räder!

11. *Röhrenaufgaben*

Ein Schwimmbecken kann durch zwei Zuflussröhren gefüllt werden.

---

[1] driften (Seemannssprache), treiben

a) Die eine würde dazu 6 Stunden weniger als die andere benötigen. Zusammen brauchen sie 4 Stunden. In wie vielen Stunden würde jede Röhre allein das Becken füllen?

b) Die erste Röhre würde das Becken allein in 5 Stunden füllen. Die zweite würde 4,5 Stunden mehr als beide zusammen benötigen. Wie viele Stunden würde die zweite Röhre allein benötigen?

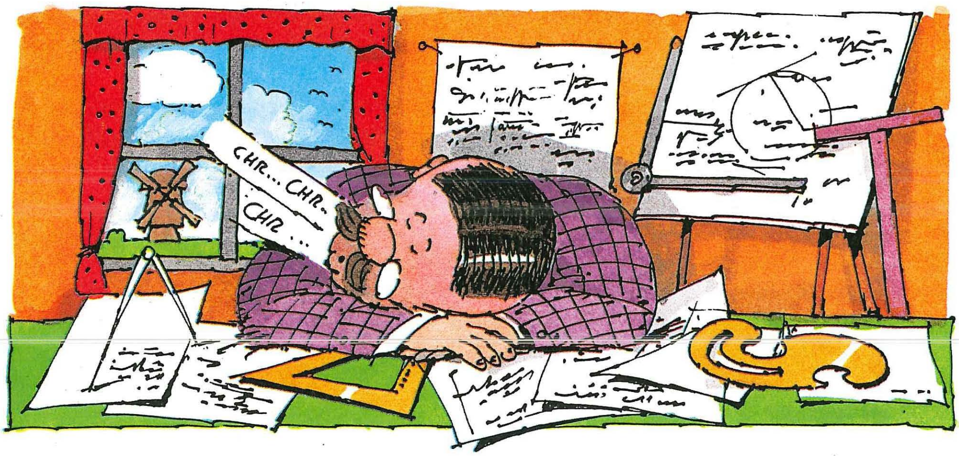
12. *Leistung*
Ein großer landwirtschaftlicher Betrieb besitzt zwei Traktoren unterschiedlicher Leistung. Der leistungsstärkere Traktor benötigt zum Pflügen eines bestimmten Feldes 5 Stunden weniger als der leistungsschwächere. Beide brauchen zusammen 6 Stunden. Wie viele Stunden würde jeder Traktor zum Pflügen des Feldes benötigen?

Tüftelecke

1. Aus der *Vollständigen Anleitung zur Algebra* von *Leonhard Euler* (1770)
Zwei Bäuerinnen tragen zusammen 100 Eier auf den Markt, die eine mehr als die andere, und lösen doch beide gleich viel Geld. Nun sagt die eine zur anderen: „Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer gelöst.“ Darauf antwortet die andere: „Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreuzer gelöst.“ Wie viele Eier hatte jede?

2. Eine Aufgabe des Inders *Bhaskara* (um 1150 n. Chr.)
Eine Schar Affen vergnügt sich. Der achte Teil des unruhigen Haufens zum Quadrat erhoben turnt in den Bäumen herum, die restlichen 12 vollführen alle zugleich ein Geschrei auf dem Gipfel eines Hügels. Wie viele zählt die aufgeregte Schar?

§ 11 Quadratische Gleichungen mit Parametern



Schlafende Variable

Treten in einer Gleichung neben der Variablen, nach der aufgelöst werden soll, noch weitere Variable auf, so nennt man diese Parameter. Der holländische Mathematiker Hans Freudenthal hat Parameter scherzhaft als „schlafende Variable" bezeichnet. Damit wird zum Ausdruck gebracht, dass man einen Parameter beim Lösungsverfahren wie einen gleichbleibenden Wert behandeln darf.

A. Das Auflösen

In der allgemeinen Form $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ der quadratischen Gleichung treten zwei Arten von Variablen auf:

- Die Variable x, nach der aufgelöst werden soll. Deshalb nennt man sie *Lösungsvariable*.
- Die Variablen a, b, c, die beliebige Zahlen vertreten und es ermöglichen, alle quadratischen Gleichungen der gleichen Form zusammenzufassen. Diese Variablen heißen *Formvariablen* oder *Parameter*[1].

Wir haben bereits $ax^2 + bx + c = 0$ durch quadratische Ergänzung nach x aufgelöst. Jetzt stehen uns für quadratische Gleichungen zwei elegante Lösungsverfahren zur Verfügung: das Ausklammern eines Linearfaktors und das Anwenden des Satzes von Vieta. Allerdings sind diese Methoden nur mit Geschick und nicht immer anwendbar. Gelingen sie nicht auf Anhieb, lösen wir die quadratische Gleichung mit der Formel oder durch quadratische Ergänzung.

<u>Beispiel:</u>

$$x^2 + 3ax + 2a^2 = x + 2a \qquad | -x - 2a$$

$$x^2 + 3ax - x + 2a^2 - 2a = 0$$

$$x^2 + (3a - 1)\,x + (2a^2 - 2a) = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-(3a-1) \pm \sqrt{(3a-1)^2 - 4\,(2a^2 - 2a)}}{2} =$$

[1] pará (griech.), dabei; métron (griech.), Maß; Parameter: Beimaß

$$= \frac{-3a+1 \pm \sqrt{9a^2-6a+1-8a^2+8a}}{2} =$$

$$= \frac{-3a+1 \pm \sqrt{a^2+2a+1}}{2} =$$

$$= \frac{-3a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2}}{2} =$$

$$= \frac{-3a+1 \pm |a+1|}{2}$$

Für beliebige reelle Zahlen b unterscheiden sich $\pm|b|$ und $\pm b$ höchstens in der Reihenfolge der Vorzeichen. Also:

$$x_{1;2} = \frac{-3a+1 \pm (a+1)}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2a+2}{2} = -a+1; \quad x_2 = \frac{-4a}{2} = -2a$$

B. Fallunterscheidungen

Die Diskriminante einer quadratischen Gleichung entscheidet, wie viele Lösungen diese besitzt.

Beispiel: $x^2-(2t+2)x+(t^2+t)=0$

$D = b^2-4ac = (2t+2)^2-4(t^2+t) =$
$= 4t^2+8t+4-4t^2-4t = 4t+4$

1. Fall: Es gibt keine Lösung,
wenn $D = 4t+4 < 0$, d.h. $4t < -4$, d.h. $t < -1$ ist.

2. Fall: Es gibt genau eine Lösung,
wenn $D = 0$, d.h. $t = -1$ ist.
Für $t = -1$ lautet die ursprüngliche Gleichung $x^2 = 0$.
Also: $x_1 = x_2 = 0$

3. Fall: Es gibt zwei Lösungen,
wenn $D > 0$, d.h. $t > -1$ ist.

$$x_{1;2} = \frac{(2t+2) \pm \sqrt{4t+4}}{2} = \frac{2(t+1 \pm \sqrt{t+1})}{2}$$

$$x_1 = t+1+\sqrt{t+1}; \quad x_2 = t+1-\sqrt{t+1}$$

AUFGABEN

1. Löse die Gleichung nach der in eckiger Klammer angegebenen Variablen auf!

a) $A = 6a^2$ [a] b) $V = \frac{1}{3}a^2h$ [a] c) $E = \frac{1}{2}mv^2$ [v] d) $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}$ [T]

e) $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ [h] f) $(3r)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ [a]

g) $\left(\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ [r] h) $\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \left(\frac{1}{3}h\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ [a]

Nr. 2 bis 8: Die Lösungsvariable ist x. Wenn nichts anderes angegeben ist, vertreten die Parameter beliebige reelle Zahlen: $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, ..., $t \in \mathbb{R}$.

2. a) $x(x-b)+a(x-b)=0$ b) $3x(2x-b)=a(b-2x)$
c) $x^2+ab=ax+bx$ d) $x^2+nx=m(x+n)$
e) $x^2+6kx+9k^2=0$ f) $x^2+2a^2=3ax$

3. a) $x^2+a^2=2ax+1$ b) $x^2+a^2=2ax+b^2$
c) $x^2-3ax-x+2a^2+a=0$ d) $x^2+3(a^2+a)=4ax+x$
e) $x^2-a^2+2b(x+a)=0$ f) $x(x-2)-c(2x-c-2)=0$

4. a) $ax^2+1=ax+x$ b) $ax(ax+7)-5(ax+3)=0$
c) $(2x-c)^2-d(2x-c)=2d^2$ d) $(a-x)(b-x)=2(a-b)^2$
e) $(tx-1)(tx+1)+10=t^2(2x-1)$ f) $ax(ax+6)=(2a+3)(2a-3)$

5. Bestimme jeweils die Definitionsmenge und die Lösungsmenge in Abhängigkeit vom Parameter (Grundmenge $\mathbb{R}$)!

a) $\frac{x}{a}-\frac{2a}{x}=1$; $(a \neq 0)$ b) $\frac{x+2}{b}-\frac{2}{x-b}=2$; $(b \neq 0)$
c) $\frac{7c}{x+c}-\frac{c}{x-c}=\frac{4}{5}$; $(c \neq 0)$ d) $\frac{x}{x+a}+\frac{6a^2}{x^2-a^2}=\frac{3a}{x-a}$; $(a \neq 0)$

6. Bestimme die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter t!

a) $x^2+6x+t=0$ b) $x^2-3tx-18=0$
c) $x^2+(2t-1)x+t^2=0$ d) $tx^2+2x+2=0$
e) $tx^2+(4+2t)x+t=0$ f) $tx^2-2tx+3x+t=0$

7. Bestimme die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter! Wie lauten in den Fällen mit lösbaren Gleichungen die Lösungsterme? (Vieta-Probe!)

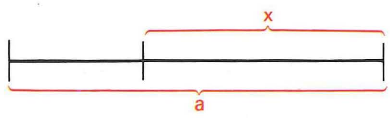
a) $x^2-4x+4-a=0$ b) $x^2+6x+9+b=0$
c) $x^2-3\sqrt{c}\,x+2c=0$; $(c \in \mathbb{R}_0^+)$ d) $x^2+2\sqrt{a}\,x+a-b=0$; $(a \in \mathbb{R}_0^+)$
e) $x^2-2\sqrt{t}\,x+3t=0$; $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ f) $x^2-2\sqrt{k}\,x+2k=4$; $(k \in \mathbb{R}_0^+)$

8. Für welche Parameterwerte t besitzt die Gleichung genau eine Lösung? Wie lautet jeweils diese Lösung?

a) $x^2-tx+9=0$ b) $x^2-3x-3tx+2t=0$
c) $tx^2+10x+t=0$ d) $tx^2-tx+2x+t=0$

9. *Der „Goldene Schnitt"*

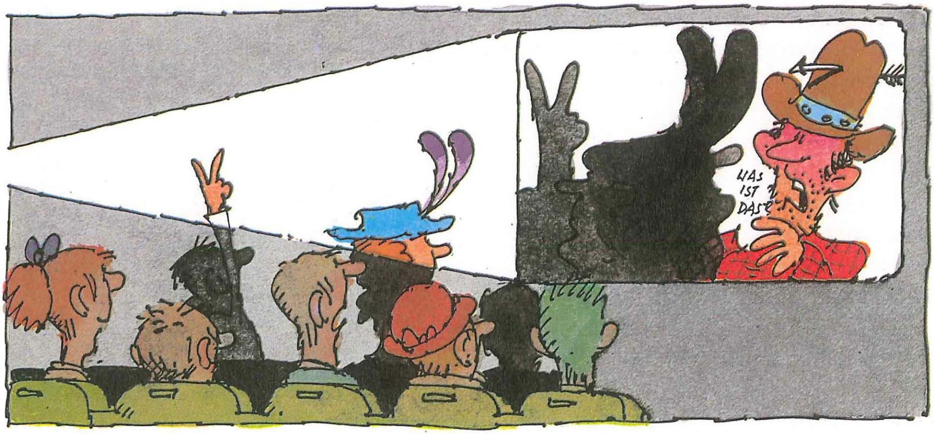
Bereits in der Antike haben sich die Griechen damit befasst, welche Streckenteilung in der Architektur und Malerei vom menschlichen Auge als besonders „schön" empfunden wird:



Eine Strecke der Länge a heißt nach dem Goldenen Schnitt geteilt, wenn das Verhältnis der Längen der größeren Teilstrecke zur Gesamtstrecke gleich dem Verhältnis der Längen der kleineren zur größeren Teilstrecke ist.

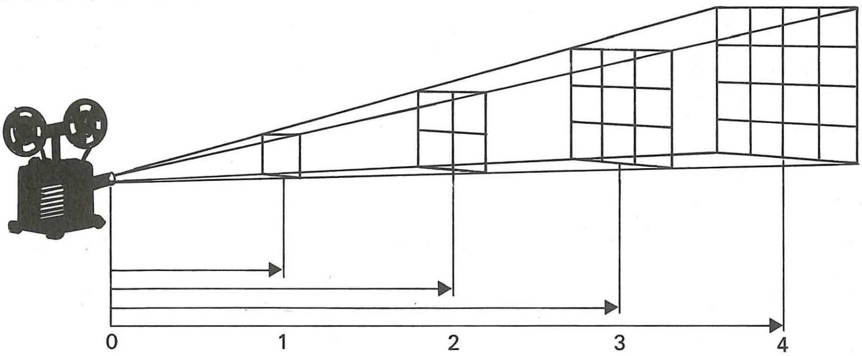
a) Drücke die Länge x der größeren Teilstrecke durch a aus!
b) Das Längenverhältnis x : a des Goldenen Schnitts ist irrational. Gib dafür als guten rationalen Näherungswert einen Bruch mit dem Nenner 8 an!
c) Die Türme des Kölner Doms sind 160 m hoch. Sie werden durch die Stelle, wo der Helm beginnt, im Goldenen Schnitt geteilt. In welcher Höhe befindet sich diese Stelle?

§12 Einfache quadratische Funktionen



Im Kino

Durch Schwebstaub in der Luft wird in einem Kino das Lichtbündel sichtbar. Die Größe des Bildes ist vom Abstand des Projektors von der Leinwand und von der Brennweite des Objektivs abhängig. Wie ändert sich bei unveränderter Brennweite der Flächeninhalt des Bildes, wenn der Abstand Projektor-Leinwand verdoppelt, verdreifacht, ... wird?

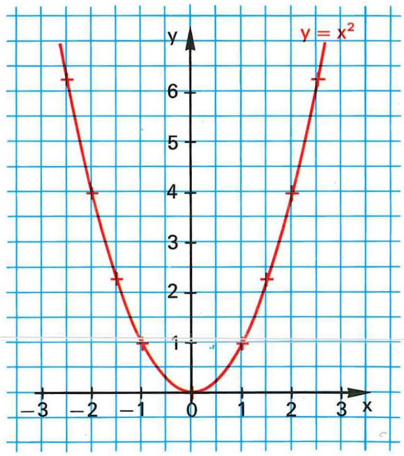


A. Die Quadratfunktion

Zu jeder reellen Zahl x gibt es *genau ein* Quadrat x^2. Folglich ist die *Zuordnung* $x \mapsto x^2$ *eindeutig* und damit eine *Funktion*. Man nennt sie *Quadratfunktion*. Sie wird durch den *Funktionsterm* $f(x) = x^2$ oder durch die *Funktionsgleichung* $y = x^2$ beschrieben. Die Menge ihrer x-Werte, die *Definitionsmenge* D, ist – wenn keine Einschränkung angegeben ist – die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Da für beliebige reelle Zahlen das Quadrat x^2 einer Zahl x gleich dem Quadrat $(-x)^2$ der Gegenzahl $-x$ ist, verläuft der Graph der Quadratfunktion symmetrisch zur y-Achse. Sein tiefster Punkt heißt *Scheitel*. Er liegt im Koordinatenursprung.

Jede zu diesem Graphen kongruente Kurve nennt man *Normalparabel*. Der Graph der Quadratfunktion ist also eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel im Ursprung.
Für $x > 0$ ist die Quadratfunktion monoton wachsend, für $x < 0$ monoton abnehmend.
Alle Funktionswerte der Quadratfunktion sind nichtnegativ. Gibt man einen beliebigen nichtnegativen y-Wert vor, so ist dieser das Quadrat von $\sqrt{y}$ und von $-\sqrt{y}$. Die Menge der Funktionswerte y, die *Wertemenge* der Quadratfunktion, ist also die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen: $W = \mathbb{R}_0^+$



B. Die Funktion $x \mapsto x^2 + q$

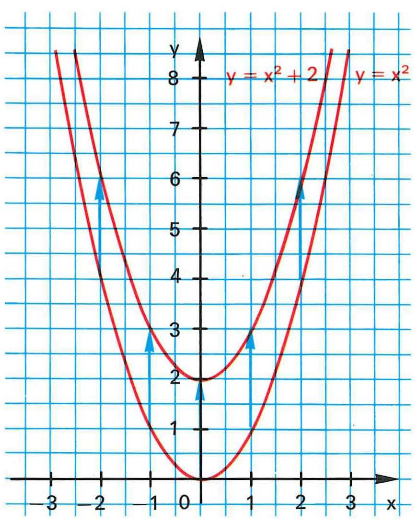
Tritt im Funktionsterm außer x^2 noch ein lineares Glied px oder auch ein konstantes Glied q auf, so heißt die Funktion *quadratische Funktion*.

Beispiel:
$x \mapsto x^2 + 2; \quad x \in \mathbb{R}$

Wertetabelle:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$x^2 + 2$	11	6	3	2	3	6	11

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 + 2$ um 2 größer als x^2. Somit geht der Graph der Funktion $x \mapsto x^2 + 2$ durch eine Verschiebung um 2 Einheiten nach oben aus dem Graphen der Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ hervor: Der Graph der Funktion $x \mapsto x^2 + 2$; $x \in \mathbb{R}$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel S (0|2).

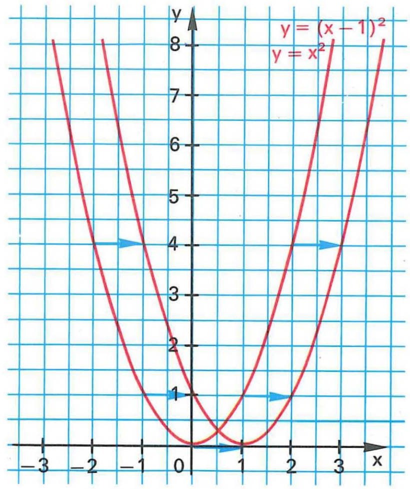


Die für die Funktion $x \mapsto x^2 + q$ im Fall $q = 2$ angestellten Überlegungen lassen sich auf jedes beliebige $q \in \mathbb{R}$ übertragen:

Der Graph der Funktion $x \mapsto x^2 + q$; $x \in \mathbb{R}$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel S (0|q).

C. Die Funktionen $x \mapsto (x - x_s)^2$

Auch der Graph einer Funktion der Form $x \mapsto (x - x_s)^2$ ist eine Normalparabel.



Beispiel:
$x \mapsto (x - 1)^2; \quad x \in \mathbb{R}$

Wertetabelle:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4

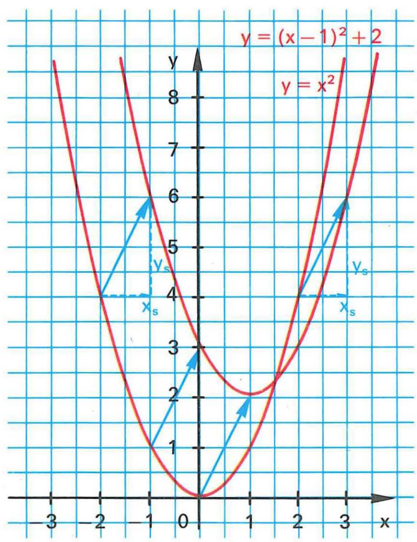
Die dritte Zeile der Wertetabelle geht aus der zweiten Zeile hervor, wenn man diese um eine Einheit nach rechts verschiebt. Somit ist der Graph der Funktion $x \mapsto (x - 1)^2$ eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(1|0)$.

Die für die Funktion $x \mapsto (x - x_s)^2$ im Fall $x_s = 1$ angestellten Überlegungen lassen sich auf jedes beliebige $x_s \in \mathbb{R}$ übertragen:

> Der Graph der Funktion $x \mapsto (x - x_s)^2$; $x \in \mathbb{R}$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(x_s|0)$.

D. Die Funktion $x \mapsto (x - x_s)^2 + y_s$

Der Graph einer Funktion der Form $x \mapsto (x - x_s)^2 + y_s$ ist ebenfalls eine Normalparabel, deren Scheitel im Allgemeinen aber nicht auf einer Koordinatenachse liegt.



Beispiel:
$x \mapsto (x - 1)^2 + 2; \quad x \in \mathbb{R}$

Wertetabelle:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4
$(x-1)^2+2$	18	11	6	3	2	3	6

Die dritte Zeile der Tabelle geht wiederum aus der zweiten Zeile durch eine Verschiebung um eine Einheit nach

rechts hervor. Der Summand $+2$ im Funktionsterm bewirkt, dass alle Funktionswerte in der vierten Zeile um 2 größer sind als jene der dritten Zeile.
Somit ist der Graph der Funktion $x \mapsto (x-1)^2+2$ eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(1|2)$.

Die für die Funktion $x \mapsto (x-x_s)^2+y_s$ im Fall $x_s=1$ und $y_s=2$ angestellten Überlegungen lassen sich auf beliebige $x_s, y_s \in \mathbb{R}$ übertragen:

Der Graph der Funktion $x \mapsto (x-x_s)^2+y_s$; $x \in \mathbb{R}$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(x_s|y_s)$.

E. Scheitelbestimmung durch quadratische Ergänzung

Der Graph der Funktion $x \mapsto (x-x_s)^2+y_s$ ist für alle $x_s, y_s \in \mathbb{R}$ eine nach oben geöffnete Normalparabel. Der Scheitel ist der tiefstgelegene Punkt, d. h. jener Punkt, dessen y-Koordinate am kleinsten ist. Den kleinsten Funktionswert erhält man, wenn in der Funktionsgleichung $y=(x-x_s)^2+y_s$ das Quadrat den Wert Null annimmt. Das tritt für $x=x_s$ ein, und dann ist $y=y_s$. Somit sind x_s und y_s die Koordinaten des Scheitels.
Durch quadratische Ergänzung kann die Gleichung $y=x^2+px+q$ einer quadratischen Funktion auf die *Scheitelform* $y=(x-x_s)^2+y_s$ gebracht werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} y = x^2+4x+3 &= x^2+4x+2^2-2^2+3= \\ &=(x+2)^2-4+3=(x+2)^2-1= \\ &=(x-(-2))^2-1 \end{aligned}$$

Der Graph der Funktion $x \mapsto x^2+4x+3$ ist somit eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(-2|-1)$.

Bei der quadratischen Gleichung haben wir die quadratische Ergänzung auf beiden Seiten der Gleichung addiert. Damit bei einer Termumformung ein äquivalenter Term entsteht, müssen wir dagegen die quadratische Ergänzung für das vollständige Quadrat addieren und anschließend zum Ausgleich wieder subtrahieren.
Die entsprechende Umformung führt auch im allgemeinen Fall zum Ziel:

$$\begin{aligned} y = x^2+px+q = x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q &= \\ =\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q &= \\ =\left(x-\left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2+q-\frac{1}{4}p^2 & \end{aligned}$$

Da die Normalparabel nach oben geöffnet ist, nimmt die Funktion nur y-Werte an, die größer oder gleich dem y-Wert $q-\frac{1}{4}p^2$ des Scheitels sind.

Damit ist bewiesen:

Satz

> Der Graph der quadratischen Funktion $x \mapsto x^2 + px + q$; $x \in \mathbb{R}$ ist eine nach oben geöffete Normalparabel mit dem Scheitel $S\left(-\frac{p}{2} \middle| q - \frac{1}{4}p^2\right)$.
> Die Wertemenge der Funktion ist $W = [q - \frac{1}{4}p^2; \infty[$.

AUFGABEN

1. Stelle für die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ eine Wertetabelle für das Intervall $[-3; 3]$ mit der Schrittweite 0,2 auf und zeichne den Graphen sorgfältig auf Millimeterpapier. Klebe die Zeichnung auf einen dünnen, festen Karton und schneide eine Schablone für die Normalparabel aus.

2. Erstelle für folgende Funktionen Wertetabellen für das Intervall $[-3; 3]$ mit der Schrittweite 0,5 und zeichne den Graphen. Gib jeweils die Scheitelkoordinaten an!

a) $x \mapsto x^2 + 1$ b) $x \mapsto x^2 - 1$ c) $x \mapsto x^2 - 2$
d) $x \mapsto (x+1)^2$ e) $x \mapsto (x-0,5)^2$ f) $x \mapsto (x+0,5)^2$
g) $x \mapsto (x+1)^2 + 2$ h) $x \mapsto (x-0,5)^2 - 3$ i) $x \mapsto (x+0,5)^2 - 4$

3. Entnimm der Funktionsgleichung die Koordinaten des Parabelscheitels und zeichne die Parabel mithilfe der Schablone!

a) $y = x^2 - 2$ b) $y = (x-3)^2$ c) $y = (x-2)^2 - 3$
d) $y = x^2 + 2$ e) $y = (x+3)^2$ f) $y = (x+2)^2 + 3$
g) $y = (x+3)^2 - 2$ h) $y = (x-3)^2 + 2$ i) $y = (x+2)^2 - 3$

4. Wie lautet die Gleichung der quadratischen Funktion $x \mapsto x^2 + px + q$, deren Graph den Punkt S als Scheitel besitzt?

a) $S(2|5)$ b) $S(2|-5)$ c) $S(-2|5)$ d) $S(-2|-5)$
e) $S(0|-3)$ f) $S(-3|0)$ g) $S(-5|-3)$ h) $S(-0,5|2,5)$

5. Bestimme für folgende quadratische Funktionen die Scheitelkoordinaten und zeichne den Graphen!

a) $x \mapsto x^2 + 4x + 4$ b) $x \mapsto x^2 + 4x + 1$ c) $x \mapsto x^2 + 4x$
d) $x \mapsto x^2 + 8x + 13$ e) $x \mapsto x^2 - 6x + 8$ f) $x \mapsto x^2 - 2x - 1$
g) $x \mapsto x^2 + x + \frac{1}{4}$ h) $x \mapsto x^2 - 3x + \frac{11}{4}$ i) $x \mapsto x^2 + 5x + \frac{15}{4}$
k) $x \mapsto x^2 - \frac{1}{2}x$ l) $x \mapsto x^2 + \frac{10}{3}x$ m) $x \mapsto x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{9}$

6. Erstelle für folgende Funktionen Wertetabellen und zeichne die Graphen!

a) $x \mapsto (3-x)^2$ b) $x \mapsto (2-x)^2$ c) $x \mapsto (-2-x)^2$

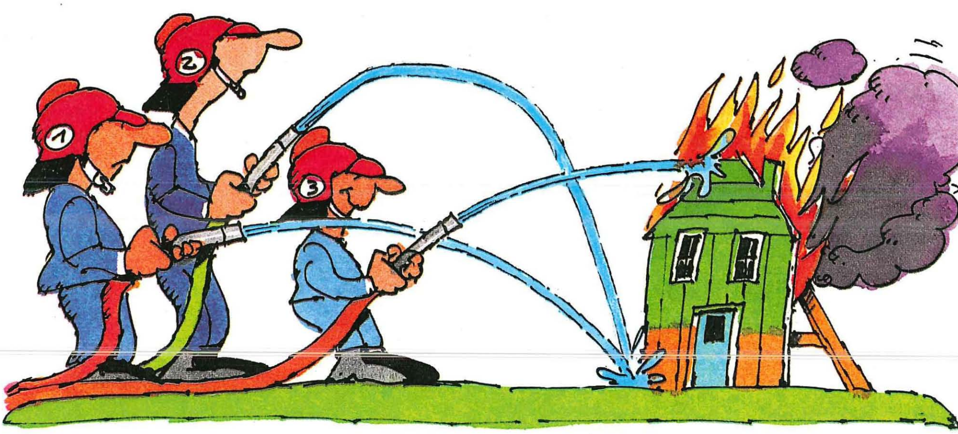
Gib jeweils einen äquivalenten Funktionsterm an!

7. Ermittle für folgende Funktionen im angegebenen Intervall I den kleinsten und den größten Funktionswert!

a) $x \mapsto x^2 - 2$; $I = [-2; 3]$ b) $x \mapsto (x-1)^2 - 2$; $I = [-3; 3]$
c) $x \mapsto x^2 - 4x + 3$; $I = [-3; 3]$ d) $x \mapsto x^2 - 4x$; $I = [0; 2]$

In welchen Teilintervallen von I ist die Funktion jeweils monoton wachsend bzw. monoton abnehmend?

§13 Die allgemeine quadratische Funktion



Wurfparabeln

Galileo Galilei (geb. 1564 in Pisa, gest. 1642 in Arcetri bei Florenz) entdeckte die Gesetze des freien Falls. Er erkannte, dass die Bahnkurve eines schräg nach oben geworfenen oder geschossenen Körpers eine nach unten geöffnete Parabel ist. Damit wurde die Parabel zum ersten Mal zur Beschreibung eines Naturvorgangs verwendet; zuvor hatte man nur auf Geraden und Kreise zurückgegriffen.

A. Die Funktion $x \mapsto ax^2$

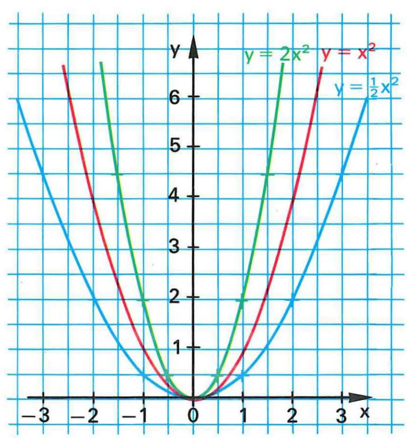
In den bisher behandelten Fällen war der Graph einer quadratischen Funktion stets eine nach oben geöffnete Normalparabel. Für quadratische Funktionen der Form $x \mapsto ax^2$ gilt das nicht mehr. Ihre Graphen heißen *Parabeln*.

Beispiele:

$x \mapsto 2x^2$ und $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

Wertetabelle:

x	0	0,5	1	1,5	2	3
x^2	0	0,25	1	2,25	4	9
$2x^2$	0	0,5	2	4,5	8	18
$\frac{1}{2}x^2$	0	0,125	0,5	1,125	2	4,5

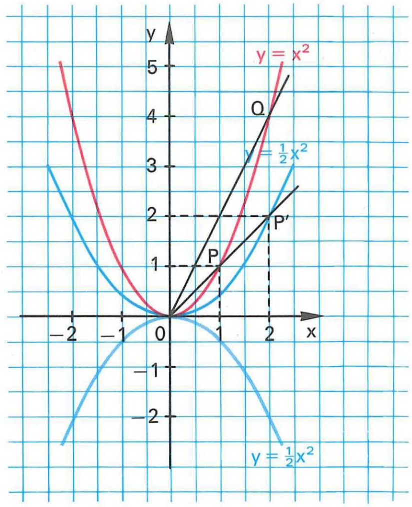


Die Parabel $y = 2x^2$ erhält man aus der Normalparabel $y = x^2$ durch eine Streckung der Ordinaten mit dem Faktor 2 in Richtung der y-Achse, die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ durch eine Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$. Die Punkte der x-Achse bleiben dabei fest.

Es gibt somit Parabeln, die nicht kongruent sind. Andererseits sind jedoch alle Parabeln ähnlich.

Beispiel:

Die Normalparabel $y = x^2$ kann durch eine zentrische Streckung auf die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ abgebildet werden: Der Punkt $P(1|1)$ besitzt bei der Streckung mit dem Zentrum $Z(0|0)$ und dem Faktor 2 den Bildpunkt $P'(2|2)$; dessen Koordinaten erfüllen die Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$. Durch die genannte Abbildung wird $Q(2|4)$ auf $Q'(4|8)$ abgebildet; dessen Koordinaten erfüllen ebenfalls die Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ usw.



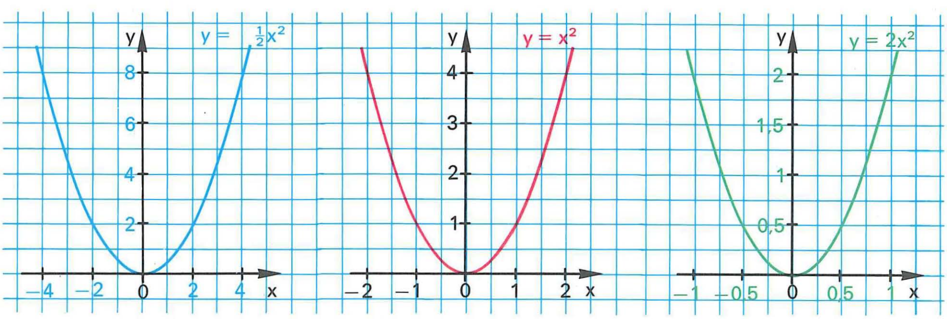
Der Graph von $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Man erhält sie durch Spiegelung des Graphen von $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ an der x-Achse.

Alle Parabeln haben die gleiche Form. Daraus folgt: Bei geeigneter Wahl der Einheit für das Koordinatensystem ist es sogar möglich, jede Parabel mit der Schablone der Normalparabel zu zeichnen.

Beispiele:

$x \mapsto 2x^2$ und $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2$

Bei der Normalparabel $y = x^2$ ist für $x_1 = 1$ auch der Funktionswert $y_1 = 1$. Um die Einheit für die anderen Parabeln zu finden, suchen wir den positiven x-Wert der Parabel, der gleich dem zugehörigen y-Wert ist: Bei der Parabel $y = 2x^2$ ist das für 0,5 der Fall, bei der Parabel $y = \dfrac{1}{2}x^2$ für 2.



Zur Kontrolle lesen wir die Wertepaare der Wertetabelle an den gezeichneten Parabeln ab.

Wir fassen zusammen:

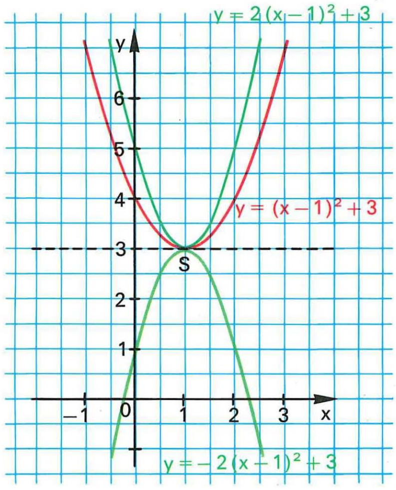
Der Graph der Funktion $x \mapsto ax^2$; $(a \neq 0)$ heißt Parabel. Ihr Scheitel liegt im Ursprung.
Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet.
Für $|a| > 1$ ist die Parabel enger, für $|a| < 1$ weiter als die Normalparabel.
Alle Parabeln sind ähnlich.

B. Die allgemeine quadratische Funktion

Der Term $ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ ist das allgemeine quadratische Polynom in x. Man definiert entsprechend:

Die Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$; $x \in \mathbb{R}$ heißt *allgemeine quadratische Fuhktion.*

Ihr Graph ist eine Parabel. Der Scheitel kann durch quadratische Ergänzung bestimmt werden.



Beispiel:

$$
\begin{aligned}
x \mapsto f(x) &= -2x^2 + 4x + 1 = \\
&= -2[x^2 - 2x] + 1 = \\
&= -2[x^2 - 2x + 1^2 - 1^2] + 1 = \\
&= -2[(x-1)^2 - 1] + 1 = \\
&= -2(x-1)^2 + 2 + 1 = \\
&= -2(x-1)^2 + 3
\end{aligned}
$$

Aus dieser Form des Funktionsterms kann man ablesen: Der Graph von $x \mapsto f(x)$ besitzt wie die Normalparabel $y = (x-1)^2 + 3$ den Scheitel $S(1|3)$. Der Faktor -2 im Funktionsterm bewirkt eine Streckung mit dem Faktor 2 in Richtung der y-Achse und eine Spiegelung an der Parallelen zur x-Achse durch S.

Durch quadratische Ergänzung kann jede allgemeine quadratische Funktion

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

in die Scheitelform

$$x \mapsto a(x - x_s)^2 + y_s$$

gebracht werden. Ihr Graph ist eine Parabel mit dem Scheitel $S(x_s|y_s)$.
Für $a > 0$ ist sie nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet. Die Parabel ist kongruent zur Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$.

C. Nullstellen

Wichtige Punkte einer Parabel sind, außer dem Scheitel, gemeinsame Punkte mit der x-Achse; sie haben die y-Koordinate Null.

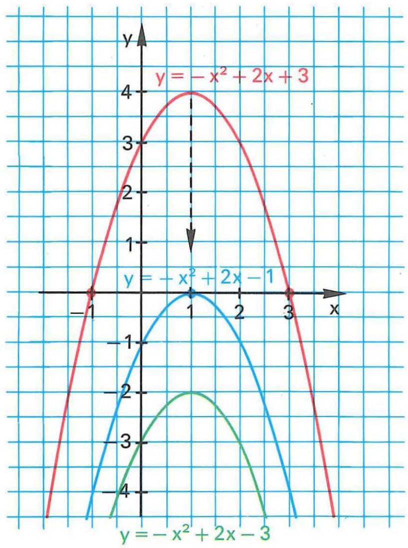
Definition:

x_1 heißt *Nullstelle* einer Funktion, wenn der zugehörige Funktionswert $y_1 = 0$ ist.

Nullstellen können grafisch (im Rahmen der Zeichengenauigkeit) oder rechnerisch bestimmt werden. Der grafische Weg ist allerdings nur dann zweckmäßig, wenn die Parabel schon gezeichnet vorliegt.

1. Beispiel:

$x \mapsto f(x) = -x^2 + 2x + 3$



Grafische Lösung:

$$f(x) = -(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 3 =$$
$$= -(x-1)^2 + 4$$

Der Graph, die nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel S (1 | 4), schneidet die x-Achse in zwei Punkten. An ihnen liest man die Nullstellen ab: $x_1 = -1;\ x_2 = 3$

Rechnerische Lösung:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$

$$x_1 = -1;\ x_2 = 3$$

2. Beispiel:

$x \mapsto f(x) = -x^2 + 2x - 1$

Grafische Lösung:

$$f(x) = -(x-1)^2$$

Der Graph, die nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel S (1 | 0), berührt die x-Achse; man erhält eine Nullstelle. Man kann sich diese Parabel aus der des 1. Beispiels durch eine Verschiebung in der negativen y-Richtung entstanden denken. Dabei rücken die beiden Nullstellen einander immer näher und fallen schließlich zusammen. Daher liegt es nahe, hier von *zwei zusammenfallenden Nullstellen* zu sprechen: $x_1 = x_2 = 1$

Rechnerische Lösung:

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

3. Beispiel: $x \mapsto f(x) = -x^2 + 2x - 3$

Grafische Lösung:

$f(x) = -(x-1)^2 - 2$

Der Graph, die nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(1|-2)$, meidet die x-Achse; es gibt keine Nullstelle.

Rechnerische Lösung:

$-x^2 + 2x - 3 = 0$

Da hier die Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8 < 0$ ist, gibt es keine Nullstellen.

Zusammenfassung:

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$	sind	die Nullstellen der quadratischen Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$.
Besitzt die Gleichung	so	hat die Funktion
1. zwei verschiedene Lösungen		zwei verschiedene Nullstellen; der Graph schneidet die x-Achse;
2. eine Lösung (zwei zusammenfallende Lösungen)		eine Nullstelle (zwei zusammenfallende Nullstellen); der Graph berührt die x-Achse;
3. keine Lösung		keine Nullstelle; der Graph meidet die x-Achse.

AUFGABEN

1. Erstelle für das Intervall $[-3; 3]$ Wertetabellen für folgende Funktionen und zeichne die Graphen in ein Koordinatensystem!

a) $x \mapsto \frac{1}{3}x^2$; $x \mapsto 3x^2$; $x \mapsto -\frac{1}{3}x^2$; $x \mapsto -3x^2$

b) $x \mapsto 0{,}4x^2$; $x \mapsto 2{,}5x^2$; $x \mapsto -0{,}4x^2$; $x \mapsto -2{,}5x^2$

2. Bestimme zu jeder Parabel die positive x-Koordinate, die gleich der zugehörigen y-Koordinate ist. Zeichne nach Wahl der geeigneten Einheit für das Koordinatensystem die Parabel mit der Schablone für die Normalparabel!

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ b) $y = 4x^2$ c) $y = \frac{1}{5}x^2$ d) $y = 5x^2$

3. Zeichne die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$. Bestimme den Scheitel des Graphen der folgenden quadratischen Funktionen. Zeichne den Graphen mithilfe der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$!

a) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3$ b) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$ c) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x$

d) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$ e) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 9$ f) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

4. Bestimme die Gleichungen der quadratischen Funktionen, die einen zur Parabel $y = \frac{1}{4}x^2$ kongruenten Graphen mit dem Scheitel S besitzen!

a) $S(3|0)$ b) $S(3|-2)$ c) $S(-1{,}5|2{,}5)$ d) $S(-2{,}5|-1{,}5)$

5. Bestimme den Scheitel und zeichne die Parabel! Ermittle die Nullstellen grafisch und rechnerisch!

a) $x \mapsto -x^2 + 3x + 4$ b) $x \mapsto -x^2 + 3x - 2{,}25$ c) $x \mapsto -x^2 + 3x - 4$
d) $x \mapsto -x^2 - 2x + 4$ e) $x \mapsto -x^2 + x + 1$ f) $x \mapsto -x^2 - 5x - 4$
g) $x \mapsto -x^2 - x - \frac{1}{4}$ h) $x \mapsto -x^2 + x + \frac{5}{4}$ i) $x \mapsto -x^2 - x + \frac{5}{4}$

6. Bestimme den Scheitel, erstelle eine Wertetabelle und zeichne die Parabel! Ermittle die Nullstellen grafisch und rechnerisch!

a) $x \mapsto 2x^2 - 4x - 2$ b) $x \mapsto -2x^2 - 8x - 3{,}5$ c) $x \mapsto -2x^2 + 12x - 18$
d) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x$ e) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - x$ f) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$
g) $x \mapsto \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{1}{4}$ h) $x \mapsto -\frac{1}{3}x^2 + x - 2$ i) $x \mapsto -\frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$

7. Bestimme die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ der Parabel, die den Scheitel S besitzt und durch den Punkt P verläuft! (Hinweis: Gehe von der Scheitelform aus.)

a) $S(0|0)$, $P(2|8)$ b) $S(0|1)$, $P(2|3)$ c) $S(0|2)$, $P(3|-1)$
d) $S(1|0)$, $P(3|8)$ e) $S(-2|0)$, $P(1|-3)$ f) $S(2|1)$, $P(4|5)$
g) $S(-2|1)$, $P(-4|3)$ h) $S(-1|-2)$, $P(-3|-4)$ i) $S(-2|3)$, $P(1|0)$

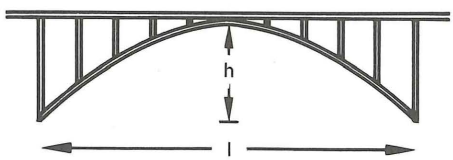
8. *Die Kettenlinie*
Eine zwischen den beiden Punkten $A(-5|10)$ und $B(5|10)$ frei herabhängende Kette beschreibt eine Kurve, die man Kettenlinie nennt. Diese verläuft außerdem durch die Punkte mit folgenden Koordinaten:

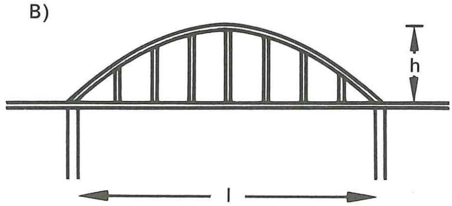
x	0	1	2	3	4
y	0	0,25	1,1	2,7	5,4

a) Zeichne die Kettenlinie zwischen A und B!
b) Untersuche, ob die Kettenlinie eine Parabel ist: Stelle dazu die Gleichung der Parabel durch A, B und den Ursprung 0 auf. Berechne zu den x-Werten der Tabelle die y-Werte der Parabel. Zeichne diese in das Koordinatensystem von a) ein!

9. *Bogenbrücken*

a) Die Spannweite des parabelförmigen Brückenträgers A) beträgt $l = 100$ m, seine Höhe $h = 25$ m. Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und bestimme die Gleichung der Parabel! Die Streben zwischen dem Bogen und der Fahrbahn haben einen Abstand von 10 m. Berechne ihre Längen!
b) Bearbeite die Aufgaben von a) für den parabelförmigen Brückenträger B), der die Spannweite $l = 80$ m und die Höhe $h = 20$ m besitzt.

A)


B)


10. *Luftwiderstand*

Der Luftwiderstand y Newton eines Autos hängt von seiner Form, seiner angeströmten Querschnittsfläche und dem Quadrat der Geschwindigkeit x km/h ab: $y = ax^2$
(a: Parameter für Form und Querschnittsfläche)

a) Eine mit dem „Audi 100" in der Größe vergleichbare Limousine der 70er Jahre besitzt bei 50 km/h den Luftwiderstand 115 N. Bestimme a!

b) Der „Audi 100" war der Vorreiter zur deutlichen Verringerung des Luftwiderstandes der Serienautos. Bei 100 km/h hat er den Luftwiderstand 280 N. Bestimme a!

c) Lege eine Wertetabelle an und zeichne die Parabeln für beide Fahrzeuge in ein Koordinatensystem! ($x \leqq 140$)

d) Wie verhalten sich die Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge, wenn sie den gleichen Luftwiderstand besitzen?

11. *Kraftstoffverbrauch*

Der bewegungshemmende Widerstand eines Autos setzt sich aus dem Luftwiderstand und dem durch Reibung hervorgerufenen Rollwiderstand zusammen. Der Luftwiderstand ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit x km/h, der Rollwiderstand ist näherungsweise unabhängig von der Geschwindigkeit. Deshalb setzen wir näherungsweise für den Kraftstoffverbrauch y Liter für 100 km an: $y = ax^2 + c$

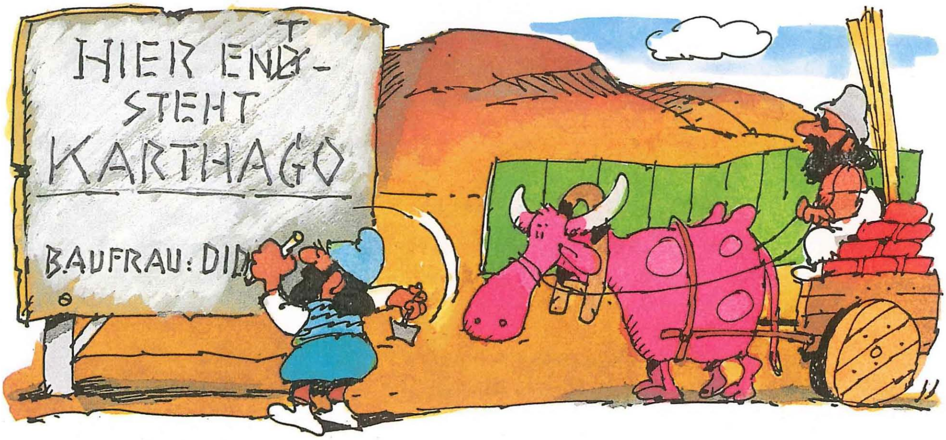
a) Ein „VW Golf D" hat folgende Verbrauchswerte: (30 km/h | 3,0 l) und (120 km/h | 7,7 l). Bestimme a und c!

b) Ein „Audi 100" hat folgende Werte: (30 km/h | 4,6 l) und (140 km/h | 9,0 l). Bestimme a und c!

c) Zeichne zu beiden Fahrzeugen die Parabeln in ein Koordinatensystem! Welche Parabel verläuft flacher? Warum?

d) Wie viel Prozent Kraftstoff kann man bei jedem Fahrzeug sparen, wenn man auf der Autobahn anstatt mit 130 km/h mit 100 km/h fährt?

§ 14 Extremwertaufgaben



Die Sage von der Gründung Karthagos im 9. Jh. v. Chr.

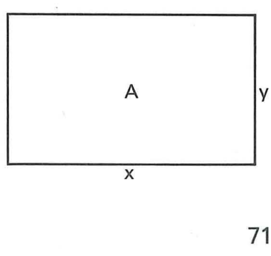
Die syrische Königstochter Dido floh vor ihrem Bruder, der ihren Gatten ermordet hatte, nach Nordafrika. Dort versprach ein König, ihr so viel Land zu schenken, wie sie mit einer Ochsenhaut umspannen könne. Dido zerschnitt die Haut in einen schmalen, langen Riemen und umspannte damit ein Gebiet, auf dem sie eine Burg errichten ließ. Aus dieser entwickelte sich Karthago.
In welcher Form musste Dido den Riemen aufspannen, damit er eine möglichst große Fläche umfasste?

A. Größtmögliche Rechtecksfläche

Um Rohstoffe zu sparen, ist man daran interessiert, dass bei der Herstellung eines Produkts möglichst wenig Abfall entsteht, bzw. eine vorhandene Materialmenge möglichst gut ausgenutzt wird. Bei solchen Problemen muss man einen kleinsten bzw. einen größten Wert, d. h. einen *Extremwert*, bestimmen.

Beispiel: Nehmen wir an, Dido gelang es, einen Riemen der Länge 800 m herzustellen. Nehmen wir ferner an, dass sie zum Anlegen einer Burg ein Rechteck am geeignetsten hielt. Wie musste sie den Riemen aufspannen, damit sich das Rechteck mit der größten Fläche ergab?

Lösung: x Meter sei die Länge des Rechtecks,
y Meter die Breite und
A Quadratmeter der Flächeninhalt.



Im Term für den Flächeninhalt
$A = xy$
treten die beiden Variablen x und y auf.

Da der Umfang des Rechtecks 800 m sein soll, können wir entweder x oder y eliminieren:

$$2x + 2y = 800$$
$$2y = 800 - 2x$$
$$y = 400 - x$$

Also:

$$A = xy = x(400 - x) = -x^2 + 400x$$

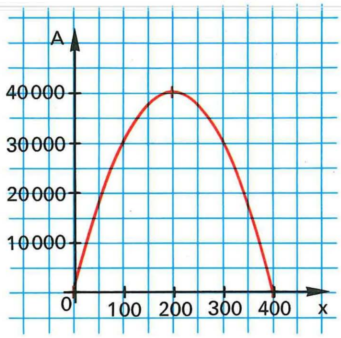
Die kleinste Rechteckslänge ist 0, die größte der halbe Umfang 400 m, die Definitionsmenge D der Flächenfunktion $x \mapsto A$ folglich $D = [0; 400]$. Sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 400$ erhält man $A = 0$.

Der Graph der Flächenfunktion $x \mapsto A$ ist eine nach unten geöffnete Parabel.

Den größten Wert für A liefert der Parabelscheitel. Um seine Koordinaten zu bestimmen, ergänzen wir quadratisch:

$$A = -x^2 + 400x =$$
$$= -(x^2 - 400x + 200^2 - 200^2) =$$
$$= -(x - 200)^2 + 40000$$

Scheitel $S(200|40000)$



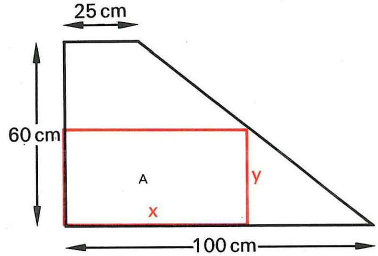
Antwort: Das größtmögliche Rechteck, das mit dem Riemen aufgespannt werden kann, ist 200 m lang und 200 m breit. Seine Fläche beträgt 40000 m^2.

Das größtmögliche Rechteck ist ein Quadrat. Würden wir mit einem anderen Wert für den Umfang die Aufgabe bearbeiten, so müssten wir beim Auflösen nach y den Umfang halbieren und beim quadratischen Ergänzen noch einmal. Der Scheitel ergibt sich also stets, wenn x ein Viertel des Umfangs ist:

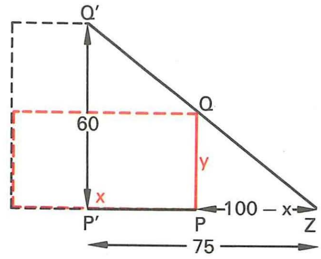
> Von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

B. Der Strahlensatz als Lösungshilfe

Beispiel: Aus einer trapezförmigen Marmorplatte soll, wie rechts dargestellt, das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt herausgesägt werden. Wie sind die Abmessungen zu wählen?



Lösung: x cm sei die Länge des Rechtecks, y cm die Breite und A cm^2 der Flächeninhalt.



$A = xy$

Der Strahlensatz liefert uns eine Gleichung zum Eliminieren von y:

„Verhältnis der Parallelstrecken = Verhältnis ihrer Entfernungen vom Kreuzungspunkt"

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{ZP}}{\overline{ZP'}}$$

$$\frac{y}{60} = \frac{100-x}{75} \qquad | \cdot 60$$

$$y = \frac{60\,(100-x)}{75} = \frac{4}{5}\,(100-x)$$

Also:

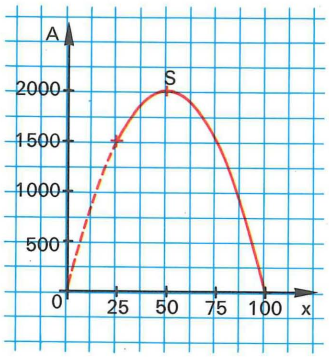
$$A = xy = x \cdot \frac{4}{5}\,(100-x) =$$

$$= \frac{4}{5}\,(-x^2 + 100x) =$$

$$= -\frac{4}{5}\,(x^2 - 100x + 50^2 - 50^2) =$$

$$= -\frac{4}{5}\,(x-50)^2 + \frac{4}{5} \cdot 2500 =$$

$$= -\frac{4}{5}\,(x-50)^2 + 2000$$



Scheitel S (50|2000)

Aus der Abbildung der Marmorplatte entnehmen wir, dass die kleinste Länge des Rechtecks 25 cm und die größte 100 cm ist. Die Flächenfunktion $x \mapsto A$ besitzt somit die Definitionsmenge $D = [25;\ 100]$.

Diese enthält die x-Koordinate des Scheitels der nach unten geöffneten Parabel. Der Scheitel liefert also die größte Rechtecksfläche:

$$x = 50; \quad y = \frac{4}{5}\,(100-50) = 40; \quad A = 2000$$

Antwort: Die größte rechteckige Platte, die aus der Marmorplatte herausgeschnitten werden kann, ist 50 cm lang und 40 cm breit. Ihr Flächeninhalt beträgt 2000 cm^2.

AUFGABEN

1. *Weideflächen*

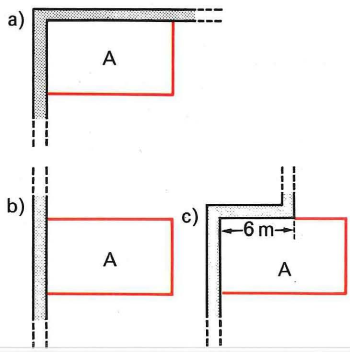
Eine rechteckige Weidefläche soll angelegt werden.

a) Sie wird von zwei Mauern und einem 30 m langen Zaun begrenzt (Figur a).

b) Sie wird von einer Mauer und einem 30 m langen Zaun begrenzt (Figur b).

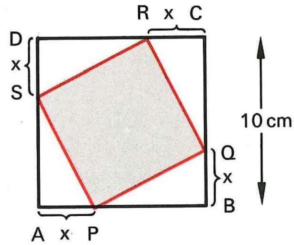
c) Sie wird von zwei Mauern und einem 30 m langen Zaun begrenzt (Figur c).

Wie muss man den Zaun anbringen, damit sich jeweils das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt ergibt?

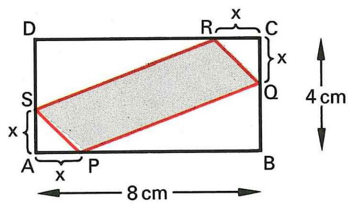


2. *Einbeschreibaufgaben*

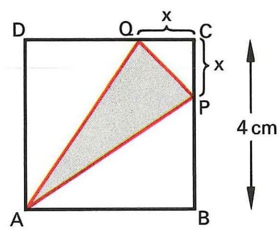
a) Ein Quadrat ABCD hat die Seitenlänge 10 cm. Trägt man von jedem Eckpunkt auf der folgenden Seite x cm ab, so erhält man die vier Punkte P, Q, R und S. Für welchen x-Wert hat das Quadrat PQRS den kleinsten Flächeninhalt? Wie groß ist dieser?



b) Ein Rechteck ABCD ist 8 cm lang und 4 cm breit. Trägt man von den Eckpunkten A und C auf den beiden anliegenden Seiten jeweils x cm ab, erhält man die vier Punkte P, Q, R und S. Für welchen x-Wert hat das Parallelogramm PQRS den größten Flächeninhalt. Wie groß ist dieser?



c) Ein Quadrat ABCD hat die Seitenlänge 4 cm. Trägt man von der Ecke C auf beiden anliegenden Seiten jeweils x cm ab, so erhält man die Punkte P und Q. Für welchen x-Wert hat das Dreieck APQ den größten Flächeninhalt? Wie groß ist dieser?

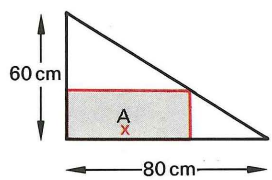


3. *Marmorplatte*

Aus einer dreieckförmigen Marmorplatte soll, wie rechts dargestellt, eine rechteckige der Länge x cm herausgesägt werden.

a) Bestimme den Term, der den Flächeninhalt A cm^2 in Abhängigkeit von x beschreibt!

b) Gib die Definitionsmenge D der Flächenfunktion $x \mapsto A$ an! Ermittle die Scheitelkoordinaten der zugehörigen Parabel!

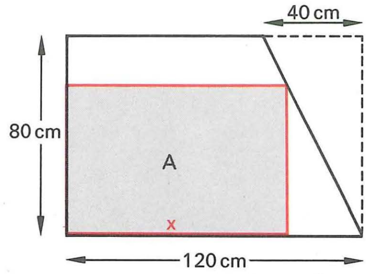


c) Zeichne den Graphen der Flächenfunktion $x \mapsto A$!

d) Wie muss man Länge und Breite wählen, damit man die rechteckige Platte mit dem größten Flächeninhalt bekommt? Wie viel Prozent der ursprünglichen Fläche entfallen auf die größte Rechtecksfläche?

4. *Stark beschädigte Tischplatte*

Aus dem trapezförmigen, unbeschädigten Teil einer wertvollen Tischplatte soll eine rechteckige herausgesägt werden.



a) Entnimm der Abbildung die Definitionsmenge der Flächenfunktion $x \mapsto A$!

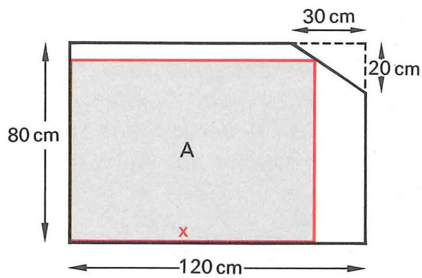
b) Bestimme den Term, der den Flächeninhalt A cm^2 des Rechtecks in Abhängigkeit von x beschreibt!

c) Ermittle die Scheitelkoordinaten der Parabel! Zeichne den Graphen der Flächenfunktion $x \mapsto A$!

d) Wie muss man Länge und Breite wählen, damit das Rechteck den größten Flächeninhalt bekommt? Wie groß ist dieser?

5. *Beschädigte Tischplatte*

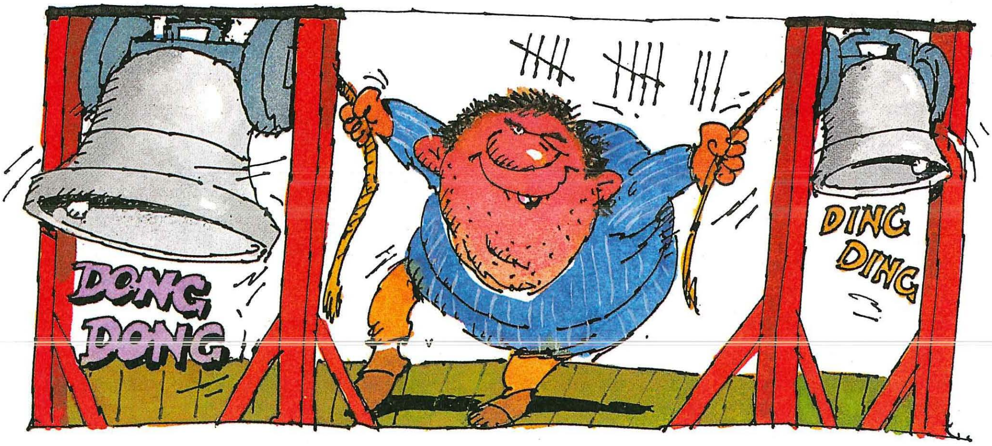
Aus dem unbeschädigten Teil einer wertvollen Tischplatte soll eine rechteckige herausgesägt werden.



a) Bearbeite die Aufgaben 4 a) bis d) für die rechts dargestellte Tischplatte!

b) Wie viele Quadratzentimeter der Tischplatte verschenkt man, wenn man anstatt des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt durch nur einen Schnitt bei $x = 90$ das linke Rechteck absägt?

§15 Quadratische Ungleichungen



Ein akustisches Wettrennen

Die kleine Glocke einer Turmuhr schlägt mit hohem Ton jede Viertelstunde, erst einmal, dann zweimal, dreimal und zur vollen Stunde viermal. Die große Glocke mit dem tiefen Ton zählt die vollen Stunden, von der ersten bis zur zwölften. Jeweils um Mitternacht beginnt ein Wettlauf zwischen beiden: Zunächst bleibt die große mit ihren wenigen Schlägen aussichtslos zurück, doch im Laufe des Tages werden ihre Schläge immer zahlreicher.

a) Wie viele Schläge macht jede der beiden Glocken bis einschließlich zur n-ten Stunde[1] des Tages?

b) Kann die große Glocke mit der Anzahl ihrer Schläge die kleine überholen?

A. Erstes Lösungsverfahren (anschaulich)

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind die Nullstellen der Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Die Nullstellen der Funktion sind jene Punkte ihres Graphen, die *auf* der x-Achse liegen. Damit stellen sich aber auch folgende Fragen:

Welche Punkte des Graphen liegen
- oberhalb der x-Achse, welche liegen
- unterhalb der x-Achse?

Oberhalb der x-Achse liegen die Punkte des Graphen, deren Funktionswerte positiv sind. Um diese Punkte zu bestimmen, muss man die *quadratische Ungleichung*

$$ax^2 + bx + c > 0$$

lösen.

[1] Beachte: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Beispiel: $x^2 - 2x - 3 > 0$

Der Graph der Funktion $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel. Um die Punkte zu finden, die oberhalb der x-Achse liegen, genügt es, die Lage der Nullstellen zu ermitteln. Nach dem Satz von Vieta sind diese $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

Die quadratische Ungleichung

$x^2 - 2x - 3 > 0$

besitzt also die Lösungsmenge

$L =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$.

Die Zeichnung liefert auch die Lösungsmengen der Ungleichungen

$x^2 - 2x - 3 < 0$,

nämlich

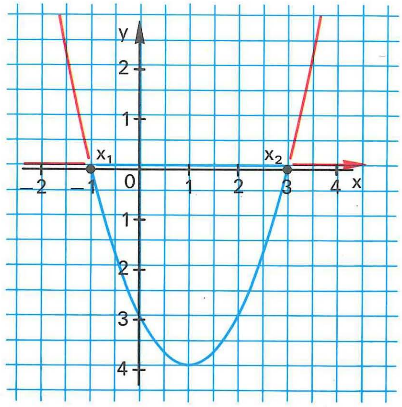
$L =]-1; 3[$,

und

$x^2 - 2x - 3 \leqq 0$,

nämlich

$L = [-1; 3]$.



B. Zweites Lösungsverfahren (formal)

Eine formale Lösung der Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$ ist möglich, wenn es gelingt, den Term $ax^2 + bx + c$ in Faktoren zu zerlegen.

Beispiel: $x^2 - 2x - 3 > 0$

Nach dem Satz von Vieta sind die Nullstellen des Terms $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Nach dem Zerlegungssatz folgt:

$(x+1)(x-3) > 0$

Das Produkt $(x+1)(x-3)$ ist genau dann positiv, wenn

1. beide Faktoren positiv oder	2. beide Faktoren negativ sind:
$x+1 > 0$ und $x-3 > 0$	$x+1 < 0$ und $x-3 < 0$
$x > -1$ und $x > 3$	$x < -1$ und $x < 3$
$x > 3$	$x < -1$

Jene Zahlen, die $x > 3$ oder $x < -1$ erfüllen, gehören also zur Lösungsmenge: $L =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$.

Besitzt die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ keine reellen Lösungen, so lässt sich der Term $ax^2 + bx + c$ der Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$ nicht in Faktoren zerlegen. Die durch $y = ax^2 + bx + c$ gegebene Parabel liegt entweder

– vollständig oberhalb der x-Achse; dann erfüllen alle reellen Zahlen die Ungleichung $ax^2 + x + c > 0$; oder

– vollständig unterhalb der x-Achse; dann erfüllt keine reelle Zahl die Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$.

Welcher dieser beiden Fälle vorliegt, hängt davon ab, ob $a > 0$ oder $a < 0$ ist.

AUFGABEN

Nr. 1 und 2: Bestimme die Lösungsmenge mit dem anschaulichen und mit dem formalen Lösungsverfahren!

1. a) $x^2 - 6x + 8 > 0$ b) $x^2 + 2x < 3$ c) $x^2 + 1{,}5x + 2{,}25 \leqq 0$
d) $1 + 4x - x^2 < 0$ e) $x^2 < 3x$ f) $x^2 - 1 > 2 - 1{,}3x$

2. a) $x^2 - 2x + 2 > 0$ b) $x^2 - 3x + 6 \leqq 0$ c) $x^2 > 4x - 4$
d) $-1 < x^2 - 6x + 7 < 2$ e) $-2 \leqq 2x^2 - 8x + 4 \leqq 4$ f) $1 \leqq 8x - 7 - 2x^2 < 4$

3. Bestimme die Lösungsmengen folgender Ungleichungen mit dem formalen Lösungsverfahren!
a) $2x^2 - x - 10 < 0$ b) $11x - 8 > 4x^2$ c) $20x^2 + 49x + 9 > 0$
d) $24x^2 - 35x + 20 > -40$ e) $9x^2 + 24x + 16 > 0$ f) $25x^2 + 256 \leqq 160x$

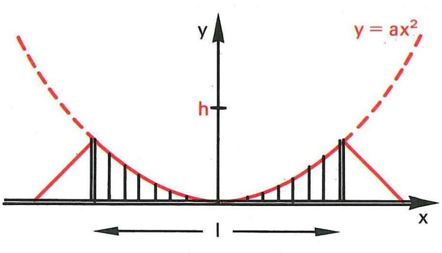
4. Folgende Ungleichungen kann man lösen, indem man mit dem Quadrat des jeweiligen Nenners multipliziert. Bestimme die Lösungsmenge!
a) $\frac{x-1}{x+4} > 0$ b) $\frac{x-9}{2-x} \geqq 0$ c) $\frac{2x+11}{5x+2} < 0$
d) $\frac{5x+2}{2x-3} \leqq 1$ e) $\frac{4x-3}{x-3} > 4$ f) $x > 2 - \frac{1}{x}$

5. Bestimme die Lösungsmenge!
a) $|x^2 - 2x - 2| \leqq 0$ b) $|x^2 - 2x - 15| > 1$ c) $\left|\frac{x+2}{x} - 1\right| < \frac{1}{10}$
d) $2 < \frac{x+1}{x-1} < 3$ e) $\left|\frac{3x}{x-2}\right| > 2$ f) $|3x - 1| > |2 - x|$

6. Bestimme die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter t!
a) $x^2 + 2tx - 3t = 0$ b) $x^2 + tx + t + 1{,}25 = 0$ c) $x^2 - 2tx - 4t - 3 = 0$

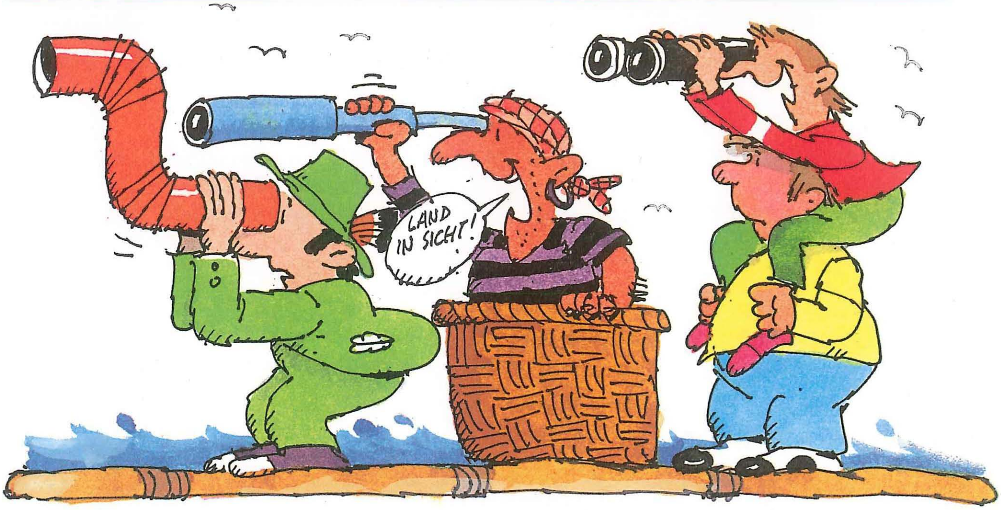
7. *Hängebrücke*

Die Tragseile von Hängebrücken beschreiben Kettenlinien oder Parabelbögen. Liegt bei einem parabelförmigen Bogen der Scheitel im Ursprung des Koordinatensystems, so lautet seine Gleichung $y = ax^2$.
Die Spannweite der Brücke sei l, die größtmögliche Höhe der Pfeiler h. Stelle die Ungleichung für a auf!



8. Ein Bauer möchte mit einem 200 m langen Elektrozaun eine rechteckige Weide abgrenzen, deren Fläche mindestens 2400 m² betragen soll. Bestimme den Mindest- und den Höchstwert für die Länge des abzusteckenden Rechtecks!

§ 16 Die Wurzelfunktion



Sehweite bei ruhiger See

Wegen der Krümmung der Erdoberfläche ist der Ausblick aufs offene Meer begrenzt. Befindet sich die Augenhöhe des Beobachters 2 m über dem Wasserspiegel, so kann ein unmittelbar auf der Wasseroberfläche schwimmender Gegenstand noch wahrgenommen werden, wenn er höchstens 5 km entfernt ist. Die Sehweite s wächst mit der Augenhöhe h, und es gilt: s ist proportional zu $\sqrt{h}$.

a) Wie weit kann man von einem Deich (8 m), von einer Düne (18 m), von einem Leuchtturm (32 m) und von einem Rettungshubschrauber (50 m) aufs offene Meer hinausschauen?

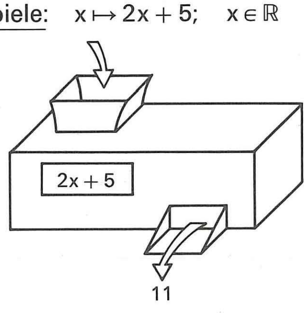
b) Stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen!

A. Umkehrbare Funktionen

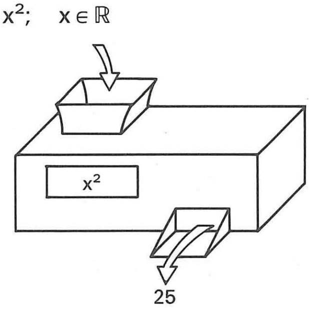
Die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$; $x \in \mathbb{R}$ kann man durch die „x^2-Maschine" veranschaulichen. Die eingegebene Zahl x wird mit sich selbst multipliziert, das Ergebnis y ausgegeben.

Bei einer linearen Funktion kann man umgekehrt die Zahl x eindeutig bestimmen, wenn der Funktionsterm und die ausgegebene Zahl y bekannt sind. Bei der Quadratfunktion ist das nicht möglich.

Beispiele: $x \mapsto 2x + 5$; $x \in \mathbb{R}$



$x \mapsto x^2$; $x \in \mathbb{R}$



Ist $y = 11$, so folgt aus $2x + 5 = 11$, dass 3 eingegeben wurde.

Ist $y = 25$, so wurde entweder 5 oder -5 eingegeben.

Um aus der ausgegebenen Zahl y auf die eingegebene Zahl x zu schließen, kann man sich vorstellen, dass die Funktionsmaschine rückwärts läuft. Die „x^2-Maschine" ist dann keine Funktionsmaschine mehr. Zum Beispiel müsste sie zur eingegebenen Zahl 25 die beiden Zahlen 5 und -5 ausgeben.

Es gibt somit Funktionen, bei denen auch die umgekehrte Zuordnung eindeutig ist. Diese Funktionen nennt man *umkehrbar*; die umgekehrte Zuordnung heißt dann *Umkehrfunktion*.

Es gibt aber auch Funktionen, bei denen die umgekehrte Zuordnung *nicht* eindeutig ist. Diese Funktionen nennt man *nicht umkehrbar*.

B. Die Wurzelfunktion

Die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$; $x \in \mathbb{R}$ ist nicht umkehrbar. Man erhält jedoch eine umkehrbare Funktion, wenn man ihre Definitionsmenge einschränkt, indem man negative x-Werte ausschließt.

Die Funktion $x \mapsto x^2$ mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ ist umkehrbar.

Sie ordnet jeder nichtnegativen Zahl ihr Quadrat zu. Die umgekehrte Zuordnung ordnet jeder nichtnegativen Zahl ihre Wurzel zu. Die nebenstehende Tabelle illustriert diesen Zusammenhang.

Die Umkehrfunktion der eingeschränkten Quadratfunktion lautet also:

$$x \mapsto \sqrt{x} \text{ mit } x \in \mathbb{R}_0^+ .$$

Sie heißt *Wurzelfunktion*.

Quadratfunktion

x	$\mapsto$	x^2
0		0
0,5		0,25
1		1
1,5		2,25
2		4
2,5		6,25
3		9
⋮		⋮
$\sqrt{x}$	$\leftarrow$	x

Wurzelfunktion

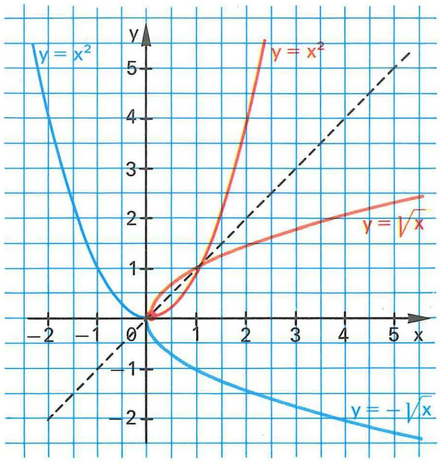
Dass die Wurzelfunktion die Umkehrfunktion der Quadratfunktion ist, wurde bereits in § 2 mit der Aussage „Das Radizieren ist die Umkehrung des Quadrierens" angedeutet. Bei der vollständigen Beschreibung einer Funktion darf die Angabe der Definitionsmenge nicht fehlen:

Funktion: $x \mapsto x^2$
$D_1 = \mathbb{R}_0^+$
$W_1 = \mathbb{R}_0^+$

Umkehrfunktion: $x \mapsto \sqrt{x}$
$D_1^* = \mathbb{R}_0^+$
$W_1^* = \mathbb{R}_0^+$

Der Graph der Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ verdeutlicht noch einmal, warum sie nicht umkehrbar ist: Es gibt Parallelen zur x-Achse, welche die Pa-

rabel in *zwei* Punkten schneiden. Die umgekehrte Zuordnung von $x \mapsto x^2$ ordnet jeder positiven Zahl also *zwei* Zahlen zu und ist damit nicht eindeutig.
Beschränkt man sich dagegen auf den Parabelast im I. Quadranten, so hat jede Parallele zur x-Achse mit diesem höchstens *einen* Schnittpunkt. Dann ist die umgekehrte Zuordnung von $x \mapsto x^2$ eindeutig.
Zeichnen wir den Graphen der Wurzelfunktion in das Koordinatensystem ein, erkennen wir eine Besonderheit in seiner Lage:



Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ ist die Umkehrfunktion der Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ mit $x \in \mathbb{R}_0^+$.
Man erhält den Graphen der Wurzelfunktion, indem man den Graphen der Quadratfunktion an der Winkelhalbierenden des I. Quadranten spiegelt.

Schränkt man die Definitionsmenge der Quadratfunktion auf die Menge der negativen Zahlen $D_2 = \mathbb{R}^-$ ein, so entsteht auch eine umkehrbare Funktion.

Sie ordnet jeder negativen Zahl ihr Quadrat zu. Die umgekehrte Zuordnung ordnet jeder positiven Zahl die Gegenzahl ihrer Wurzel zu.

Funktion: $x \mapsto x^2$, $D_2 = \mathbb{R}^-$, $W_2 = \mathbb{R}^+$

Umkehrfunktion: $x \mapsto -\sqrt{x}$, $D_2^* = \mathbb{R}^+$, $W_2^* = \mathbb{R}^-$

Quadratfunktion

x	$\mapsto$	x^2
(0		0)
−0,5		0,25
−1		1
−1,5		2,25
−2		4
−2,5		6,25
−3		9
⋮		⋮
$-\sqrt{x}$	$\leftarrow\!\shortmid$	x

Wurzelfunktion

C. Die Betragsfunktion

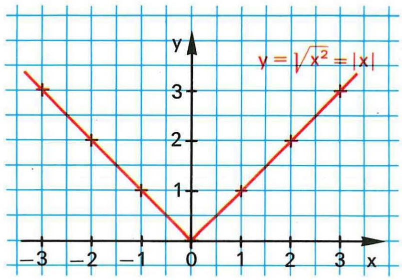
Der Term $\sqrt{x^2}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Die Funktion

$$x \mapsto \sqrt{x^2}; \quad x \in \mathbb{R}$$

entsteht durch Verknüpfung der Quadratfunktion mit der Wurzelfunktion: Zuerst wird x quadriert, anschließend x^2 wieder radiziert.

Wertetabelle:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\sqrt{x^2}$	3	2	1	0	1	2	3



Aus der Wertetabelle entnehmen wir: Die Zahlen der dritten Zeile sind die Beträge der Zahlen der ersten Zeile. Das ist verständlich, da $\sqrt{x^2} = |x|$ ist.
Die Zuordnungen $x \mapsto \sqrt{x^2}$ und $x \mapsto |x|$ beschreiben also für $x \in \mathbb{R}$ die gleiche Funktion, nämlich die *Betragsfunktion*.

AUFGABEN

1. Sind die folgenden Funktionen mit $x \in \mathbb{R}$ jeweils umkehrbar? Zeichne ihren Graphen im Intervall $[-3; 3]$. Gib, falls eine Umkehrfunktion existiert, deren Funktionsterm an. Zeichne den Graphen der Umkehrfunktion ins ursprüngliche Koordinatensystem!

a) $x \mapsto 2x$ b) $x \mapsto -x$ c) $x \mapsto -\frac{1}{2}x$ d) $x \mapsto x+1$
e) $x \mapsto 2x+1$ f) $x \mapsto 0 \cdot x$ g) $x \mapsto 0 \cdot x + 2$ h) $x \mapsto x^2 - 4$

2. Zeichne die Graphen der Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto \sqrt{x}$ in ein Koordinatensystem. Löse damit grafisch die Gleichung bzw. die Ungleichungen:

a) $x = \sqrt{x}$ b) $x < \sqrt{x}$ c) $\sqrt{x} < x$

3. Gib für folgende Funktionen jeweils die größtmögliche Definitionsmenge und die zugehörige Wertemenge an. Zeichne die Graphen!

a) $x \mapsto \sqrt{x} + 2$ b) $x \mapsto \sqrt{x} - 2$ c) $x \mapsto \sqrt{x-2}$
d) $x \mapsto \sqrt{x+2}$ e) $x \mapsto \sqrt{x-1} - 2$ f) $x \mapsto \sqrt{x+2} + 1$

4. a) Zeichne die Graphen der Funktionen $x \mapsto \sqrt{x+x}$ und $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{x}$ in ein Koordinatensystem!
b) Für welche reellen Zahlen x gilt: $\sqrt{x+x} = \sqrt{x} + \sqrt{x}$?

5. Zeichne die Graphen folgender Funktionen mit $x \in \mathbb{R}$ im Intervall $[-3; 3]$. Gib jeweils die Wertemenge an!

a) $x \mapsto |x| - 2$ b) $x \mapsto |x| + 1$ c) $x \mapsto |x-1|$
d) $x \mapsto |x+2|$ e) $x \mapsto |x+1| - 2$ f) $x \mapsto |x-2| + 1$

6. a) Zeichne die Graphen der Funktionen $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 4}$; $x \in \mathbb{R}$ und $x \mapsto |x-2|$; $x \in \mathbb{R}$ im Intervall $[-1; 5]$ in ein Koordinatensystem!
b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x-2|$?

7. Gib für folgende Funktionen jeweils die größtmögliche Definitionsmenge und die zugehörige Wertemenge an. Zeichne die Graphen!

a) $x \mapsto -\sqrt{x}$ b) $x \mapsto \sqrt{-x}$ c) $x \mapsto \sqrt{|x|}$
d) $x \mapsto \sqrt{|x| + 1}$ e) $x \mapsto \sqrt{|x| - 1}$ f) $x \mapsto \sqrt{|x| - 2} + 1$

8. a) Warum ist die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ mit $x \in \mathbb{R}$ nicht umkehrbar?

b) In welche Teilmengen D_1 und D_2 kann man $\mathbb{R}$ zerlegen, damit die Funktionen $x \mapsto |x|$; $x \in D_1$ und $x \mapsto |x|$; $x \in D_2$ umkehrbar sind?

c) Bestimme für deren Umkehrfunktionen jeweils den Funktionsterm, die Definitionsmenge und die Wertemenge!

d) Zeichne die Graphen der Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen!

9. *Tsunamis*

Tsunamis sind durch Seebeben ausgelöste Flutwellen im Pazifik. Die Geschwindigkeit v (in m/s) eines Tsunami ist in Küstennähe von der Wassertiefe h (in m) abhängig, und es gilt[1]: $v \sim \sqrt{h}$.

a) Vervollständige folgende Wertetabelle und stelle die Formel für v auf!

h in m	0	1	2,5	4	6,5	9	12,5	16
v in $\frac{m}{s}$		3						

b) Zeichne den Graphen der Funktion $h \mapsto v$!

c) Mit abnehmender Geschwindigkeit nimmt die Höhe der Flutwelle zu. Wie verhalten sich Geschwindigkeit und Höhe der Flutwelle, wenn sich ein Tsunami der Küste nähert?

10. *Wasserwellen*

Den Abstand eines Wellenbergs bis zum nächsten nennt man Wellenlänge. Die Geschwindigkeit v (in m/s) der Wasserwellen hängt von der Wellenlänge x (in m), aber nicht von der Wellenhöhe ab[1]:

$$v = 1{,}25\sqrt{x}$$

Diese Formel gilt nur bei genügend großer Wassertiefe. Ist die Wellenlänge größer als die sechsfache Wassertiefe h (in m), so wird die Geschwindigkeit v unabhängig von x:

$$v = 1{,}25\sqrt{6\,h}$$

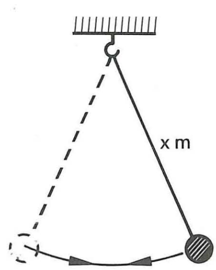
a) Berechne die Geschwindigkeit von Wasserwellen der Wellenlänge 5 m, 25 m, 100 m, 400 m in einem Ozean der Tiefe 4000 m!

b) Berechne die größtmögliche Geschwindigkeit von Wellen in diesem Ozeanbereich! Wie lang würde eine Welle mit dieser Geschwindigkeit zum Umlaufen der Erde benötigen? (Erdumfang: 40000 km)

c) In einem Bereich der Ostsee beträgt die Tiefe 50 m. Zeichne den Graphen der Funktion Wellenlänge $\mapsto$ Wellengeschwindigkeit für $0 \leqq x \leqq 500$!
(x-Achse: 1 cm $\triangleq$ 50 m; v-Achse: 1 cm $\triangleq$ 20 m/s)

11. *Das Fadenpendel*

Die Schwingungsdauer, die Zeit für eine Hin- und Herbewegung eines Pendels, hängt von seiner Länge, aber nicht von der Masse des Pendelkörpers ab. Für verschieden lange Pendel wurde die Länge x Meter und die Schwingungsdauer y Sekunden gemessen:



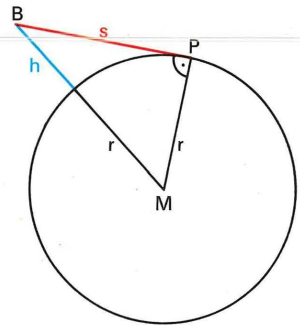
x in m	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y in s		2,0		2,8		3,5		4,0

[1] Die Variablen vertreten nur die Maßzahlen.

a) Gib die Formel für die Schwingungsdauer an!
b) Berechne die fehlenden Werte der Tabelle!
c) Zeichne den Graphen der Funktion $x \mapsto y$! Wie lang ist ein Pendel mit der Schwingungsdauer 1,0 s?

Ergänzungen und Ausblicke

Die Sehweite auf das offene Meer



Wir betrachten die Erde als Kugel mit dem Radius r. Der Beobachtungspunkt B liegt in der Höhe h über der Erdoberfläche. Dann kann man von B aus gerade noch den Punkt P erblicken; weiter entfernte Punkte liegen unter dem Horizont. BP ist eine Tangente an die Erdkugel, ΔMPB somit ein rechtwinkliges Dreieck. In diesem gilt:

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 &= (r+h)^2 \\ r^2 + s^2 &= r^2 + 2rh + h^2 \\ s^2 &= 2rh + h^2 \\ s^2 &= h(2r+h) \end{aligned}$$

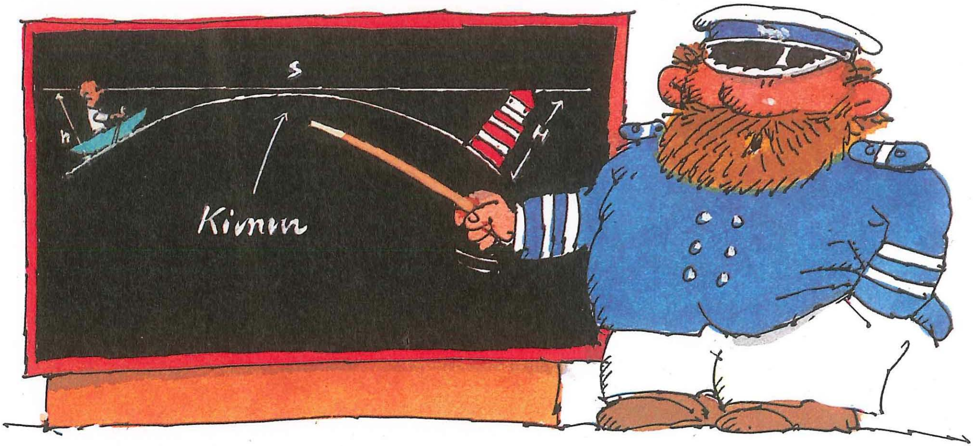
2r ist der Durchmesser der Erde; er beträgt $2 \cdot 6370$ km. Im Term $h(2r+h)$ kann der 2. Summand h, der höchstens etwa 100 m beträgt, gegenüber dem 1. Summanden 2r vernachlässigt werden:

$$s^2 = h(2r+h) \approx 2rh$$
$$s \approx \sqrt{2rh}$$

Die Sehweite s ist somit proportional zu $\sqrt{h}$.
Für $h = 2$ m erhält man:

$$s = \sqrt{2rh} = \sqrt{2 \cdot 6370\,\text{km} \cdot 0{,}002\,\text{km}} = 5{,}05\,\text{km} \approx 5\,\text{km}$$

§17 Wurzelgleichungen



Höhe des Kieler Leuchtturms

In der Seemannssprache heißt der Horizont, den man auf dem Meer wahrnimmt, die Kimm. Taucht ein Leuchtfeuer gerade am Horizont auf, so sagt man, es befindet sich in der Kimm. Ist h die Augenhöhe des Beobachters und H die Feuerhöhe über dem Meeresspiegel, so gilt für die Entfernung s des Leuchtfeuers:

$$s = \sqrt{2rh} + \sqrt{2rH} \qquad \text{(Erdradius } r = 6370\,\text{km)}$$

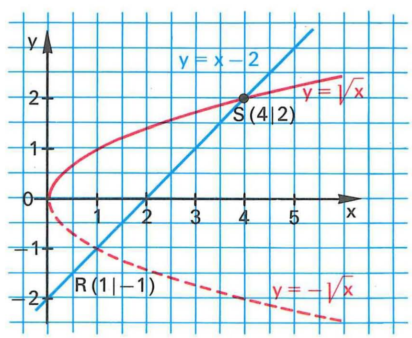
a) *Begründe diese Formel! (Hinweis: Verwende die Ergänzungen zu § 16!)*

b) *Ein Seefahrer mit der Augenhöhe 3,5 m sieht das 26 km entfernte Feuer des Kieler Leuchtturms in der Kimm. In welcher Höhe befindet sich das Feuer über der Wasseroberfläche?*

A. Lösungsverfahren für Gleichungen mit einer Wurzel

> Eine Gleichung heißt Wurzelgleichung, wenn die Lösungsvariable unter dem Wurzelzeichen auftritt.

Wurzelgleichungen lassen sich grafisch und rechnerisch lösen.



Beispiel: $x - 2 = \sqrt{x}$ ist eine Wurzelgleichung mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}_0^+$.

Grafische Lösung Die Lösung der Gleichung ist die x-Koordinate des Punktes, in dem der Graph der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ die Gerade $y = x - 2$ schneidet.

Also: $L = \{4\}$

Rechnerische Lösung

$$x - 2 = \sqrt{x} \qquad \text{Quadrieren}$$
$$(x-2)^2 = x$$
$$x^2 - 4x + 4 = x$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x_1 = 1; \quad x_2 = 4 \quad \text{(Satz von Vieta)}$$

	L.S.	R.S.
Probe für x_1:	$1 - 2 = -1$	$\sqrt{1} = 1$
für x_2:	$4 - 2 = 2$	$\sqrt{4} = 2$

Nur x_2 erfüllt die Wurzelgleichung: $L = \{4\}$

Der Punkt R ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x - 2$ mit dem Graphen der Funktion $x \mapsto -\sqrt{x}$. Da nicht nur $(\sqrt{x})^2 = x$ sondern auch $(-\sqrt{x})^2 = x$ ist, liefert die rechnerische Lösung auch die x-Koordinate dieses Punktes.

Das Beispiel zeigt:

> Um eine Wurzelgleichung zu lösen, muss man beide Seiten der Gleichung quadrieren. Das ist jedoch keine Äquivalenzumformung! Deshalb ist bei Wurzelgleichungen die Probe unerlässlich.

B. Lösungsverfahren für Gleichungen mit mehreren Wurzeln

Treten in einer Wurzelgleichung mehrere Wurzelterme auf, so ist im Allgemeinen ein mehrmaliges Quadrieren notwendig, um die Wurzeln zu beseitigen. Dabei ist es zweckmäßig, jeweils einen Wurzelterm auf einer Seite der Gleichung zu isolieren.

Lösungsschritte

Beispiel: $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} = 3$ — Definitionsmenge bestimmen

Aus $x + 1 \geqq 0 \wedge 2x - 5 \geqq 0$ folgt: $D = [2{,}5; +\infty[$ — eine Wurzel isolieren

$$\sqrt{2x-5} = 3 - \sqrt{x+1} \qquad \text{quadrieren}$$
$$2x - 5 = 9 - 6\sqrt{x+1} + x + 1 \qquad \text{zusammenfassen, isolieren}$$
$$6\sqrt{x+1} = 15 - x \qquad \text{quadrieren}$$
$$36(x+1) = 225 - 30x + x^2 \qquad \text{quadratische Gleichung lösen}$$
$$36x + 36 = 225 - 30x + x^2$$
$$x^2 - 66x + 189 = 0$$
$$x_{1;2} = \frac{66 \pm \sqrt{66^2 - 4 \cdot 189}}{2} = \frac{66 \pm 60}{2}$$
$$x_1 = 63; \quad x_2 = 3$$

Probe für x_1: $\sqrt{64} + \sqrt{121} = 19 \neq 3$ — Probe durchführen

für x_2: $\sqrt{4} + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3$

Nur x_2 erfüllt die gegebene Wurzelgleichung:

$$L = \{3\}$$

AUFGABEN

1. Löse grafisch und rechnerisch:

a) $3 - 2x = \sqrt{x}$ b) $3 - 2x = -\sqrt{x}$ c) $2x - 5 = \sqrt{x - 1}$

d) $2x - 5 = -\sqrt{x - 1}$ e) $x - 1 = \sqrt{3 - x}$ f) $x - 1 = -\sqrt{3 - x}$

2. a) $x - \sqrt{2x - 3} = 3$ b) $x + \sqrt{2x - 3} = 3$ c) $2 + \sqrt{x + 4} = x$

d) $4\sqrt{2x + 1} - 8 = x$ e) $\sqrt{4x^2 + x - 2} + 1 = 2x$ f) $2 - \sqrt{9x^2 - 7x - 1} = 3x$

3. a) $\sqrt{4x - 3} = \sqrt{6x - 5}$ b) $\sqrt{3x - 4} - \sqrt{5x - 6} = 0$ c) $\sqrt{4x + 9} - \sqrt{4 - 6x} = 0$

d) $\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{2x - 6} = 0$ e) $\sqrt{31 - 2\sqrt{6 - x}} = 5$ f) $\sqrt{2x - 5 + \sqrt{x - 9}} = 4$

4. a) $\sqrt{x + 10} + \sqrt{x} = 2$ b) $1 + 2\sqrt{x} = \sqrt{4x + 7}$ c) $\sqrt{x - 2} = \sqrt{x} - \sqrt{2}$

d) $\sqrt{9x + 5} - \sqrt{6x} - \sqrt{2} = 0$ e) $2\sqrt{x - 1} - \sqrt{5 + 2x} - 1 = 0$ f) $\sqrt{7 - 4x} - \sqrt{3 - 2x} = 1$

5. a) $\sqrt{5 + x} - \sqrt{5 - x} = \sqrt{2}$ b) $\sqrt{10 + x} + \sqrt{10 - x} = 4\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}\sqrt{x - 1} - \sqrt{2x - 1} - 1 = 0$ d) $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{3}\sqrt{x + 1} - 1 = 0$

6. Stelle durch Vorzeichenänderung erfüllbare Gleichungen her:

a) $3\sqrt{x - 1} - \sqrt{9x + 10} = 1$ b) $\sqrt{80 - \sqrt{6x - 5}} = 9$

7. a) Löse die folgende Wurzelgleichung nach x auf:

$\sqrt{x} + \sqrt{x - a^2} = a$

b) Welcher Bedingung muss a genügen, damit die Gleichung erfüllbar ist?

8. a) Löse die folgende Wurzelgleichung nach x auf:

$\sqrt{7a^2 + 2ax} - \sqrt{3ax + a^2} = a$

b) Welche Lösungen hat die Gleichung für

$a < 0$ bzw. $a > 0$ bzw. $a = 0$?

9. Die eine Seite eines Rechtecks ist um 7 cm länger als die andere. Die Diagonale ist um 2 cm länger als die größere Seite. Berechne die Länge der Rechtecksseiten!

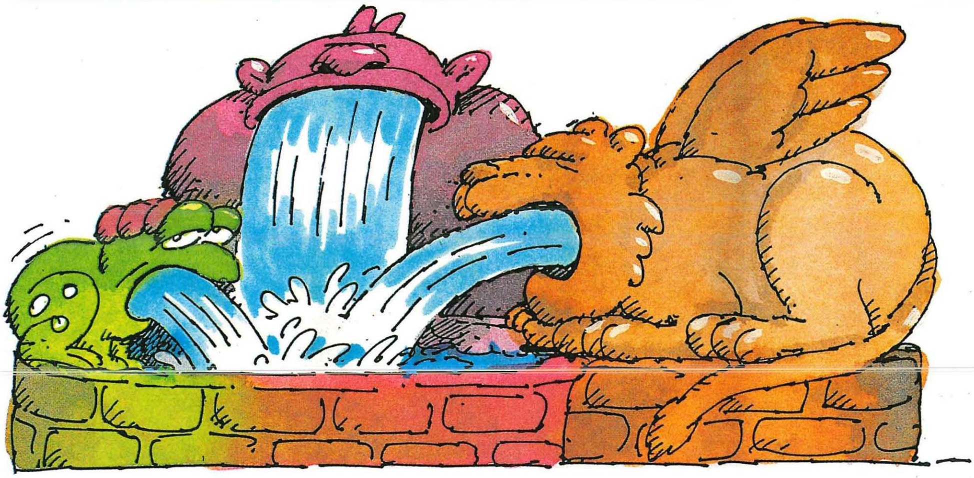
10. *CB-Funk*

Zwei geradlinige Straßen verlaufen senkrecht zueinander. Auf jeder Straße startet um 8.00 Uhr ein Radfahrer jeweils 10 km von der Kreuzung entfernt. Der eine fährt mit 18 km/h, der andere mit 21 km/h auf die Kreuzung zu. Beide Radfahrer verfügen über CB-Funkgeräte mit der Reichweite 5,0 km.

a) Um wie viel Uhr können die Radfahrer Sprechkontakt aufnehmen?

b) Die Radfahrer fahren mit gleichbleibender Geschwindigkeit geradeaus weiter. Um wie viel Uhr reißt der Sprechkontakt wieder ab?

§ 18 Nichtlineare Gleichungssysteme

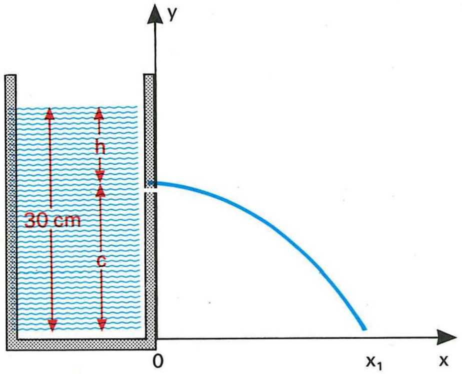


Wasserspiele

Aus dem kleinen Loch eines Gefäßes spritzt das Wasser in Form eines Parabelbogens heraus. Legen wir, wie rechts dargestellt, ein Koordinatensystem an, so beschreibt die Gleichung

$$y = -\frac{1}{4h}x^2 + c$$

den Parabelbogen. Dabei bedeutet h die Höhe der Wassersäule über dem Loch und c den Abstand des Lochs vom Boden.



a) Wird der Parabelbogen enger oder weiter, wenn h zunimmt?

b) Ermittle die Nullstelle x_1 des Parabelbogens in Abhängigkeit von h und c!

c) Ein Gefäß ist 30 cm hoch mit Wasser gefüllt. Es enthält eine Reihe von fünf übereinander liegenden Löchern mit einem gegenseitigen Abstand von 5 cm: $c_1 = 5$ cm, $c_2 = 10$ cm, …, $c_5 = 25$ cm. Berechne zu jedem einzelnen Wasserstrahl die Spritzweite x_1. Welcher Strahl spritzt am weitesten?

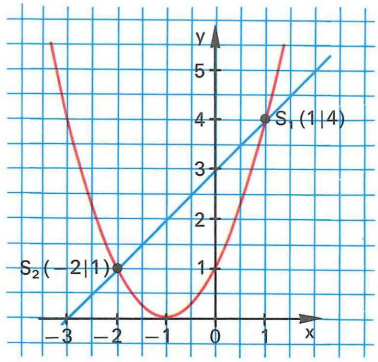
d) Lege ein Koordinatensystem an und zeichne die fünf Parabelbögen! Wo trifft der Wasserstrahl mit $c_2 = 10$ cm den Wasserstrahl mit $c_5 = 25$ cm?

e) Berechne die Koordinaten dieses Orts mithilfe der Gleichungen der beiden Parabelbögen!

A. Schnittpunkte zweier Kurven

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems kann geometrisch als Schnittpunkt zweier Geraden gedeutet werden. In einem nichtlinearen Gleichungssystem muss mindestens eine der Variablen nicht linear, d. h. nicht in der ersten Potenz, auftreten. Seine Lösungen können ebenfalls als Punkte in einem Koordinatensystem aufgefasst werden; es handelt sich dann um die Schnittpunkte zweier Linien, von denen mindestens eine keine Gerade ist.

1. Beispiel: (I) $x^2 + 2x - y + 1 = 0$
(II) $x - y + 3 = 0$



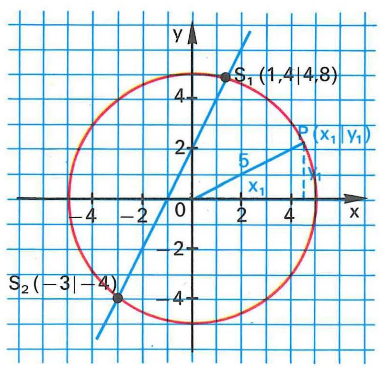
Grafische Lösung
Lösen wir beide Gleichungen nach y auf,
(I′) $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
(II′) $y = x + 3$,
so erkennen wir: Durch Gleichung (I) ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(-1|0)$ und durch Gleichung (II) eine Gerade mit dem y-Abschnitt 3 und der Steigung 1 gegeben. Die Schnittpunkte der Parabel und der Geraden sind $S_1(1|4)$ und $S_2(-2|1)$. Also: $L = \{(1|4); (-2|1)\}$

Rechnerische Lösung
Wir benützen das Einsetzverfahren: Zunächst lösen wir eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzen dann in die andere Gleichung ein.

(I) $x^2 + 2x - y + 1 = 0$
(II) $x - y + 3 = 0$ nach y auflösen
(II′) $y = x + 3$ in (I) einsetzen
$x^2 + 2x - (x+3) + 1 = 0$
$x^2 + x - 2 = 0$
$$x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$
$x_1 = 1$; $x_2 = -2$ in (II′) einsetzen
$y_1 = 4$; $y_2 = 1$
$L = \{(1|4); (-2|1)\}$

Die Zahlenpaare $(x|y)$, welche die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ erfüllen, liegen auf einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt $M(0|0)$ und dem Radius r. Die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden können somit auch als Lösungen eines nichtlinearen Gleichungssystems bestimmt werden.

2. Beispiel: (I) $x^2 + y^2 = 5^2$
(II) $y = 2x + 2$



Grafische Lösung
Die Zahlenpaare $(0|5)$, $(3|4)$, $(4|3)$, $(5|0)$ erfüllen die Gleichung (I). Ein beliebiger Punkt $P(x_1|y_1)$, dessen Koordinaten die Gleichung $x^2 + y^2 = 5^2$ erfüllen, bestimmt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen x_1 und y_1 und der Hypotenusenlänge 5 (Satz von Pythagoras). P liegt also auf dem Kreis um den Ursprung mit dem Radius 5.
Schnittpunkte: $S_1(1{,}4|4{,}8)$, $S_2(-3|-4)$; $L = \{(1{,}4|4{,}8); (-3|-4)\}$

Rechnerische Lösung

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & x^2 + y^2 &= 25 \\ \text{(II)} & y &= 2x + 2 \quad \text{in (I) einsetzen} \\ \hline & x^2 + (2x+2)^2 &= 25 \\ & x^2 + 4x^2 + 8x + 4 &= 25 \\ & 5x^2 + 8x - 21 &= 0 \end{array}$$

$$x_{1;2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 420}}{10} = \frac{-8 \pm 22}{10}$$

$x_1 = 1{,}4; \quad x_2 = -3$ in (II) einsetzen

$y_1 = 4{,}8; \quad y_2 = -4$

$L = \{(1{,}4|4{,}8);\ (-3|-4)\}$

B. Parabeltangenten

An einem Beispiel klären wir die unterschiedlichen Lagen, die eine Parabel und eine Gerade zueinander einnehmen können.
Wir betrachten die Normalparabel mit der Gleichung

(I) $\quad y = x^2$

und die Gerade mit der Steigung 2 und dem y-Abschnitt t

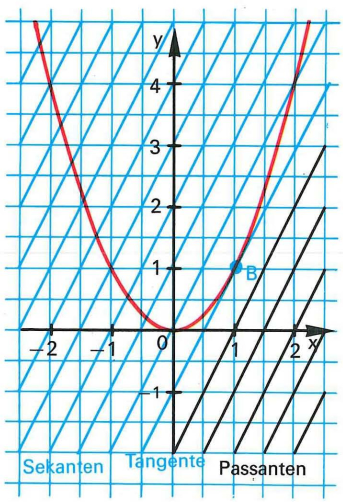
(II) $\quad y = 2x + t.$

Für die x-Koordinaten der gemeinsamen Punkte folgt durch Einsetzen von (I) in (II):

$$x^2 = 2x + t$$
$$x^2 - 2x - t = 0$$

Diese Gleichung besitzt Lösungen, wenn die Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 4 + 4t \geqq 0$ ist:

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4t}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + t}$$



Für $D > 0$, d.h. für $t > -1$, schneidet die Gerade die Parabel in zwei Punkten. Man nennt eine solche Gerade *Sekante*[1].
Mit abnehmenden t-Werten rücken die beiden Schnittpunkte immer näher zusammen. Für $t = -1$ fallen sie schließlich zusammen: $x_{1;2} = 1$. Die Gerade in dieser Grenzlage heißt *Tangente*[2]. Der Tangentenberührpunkt ist $B(1|1)$.
Für $t < -1$ gibt es keinen gemeinsamen Punkt: Die Gerade trifft die Parabel nicht; sie ist eine *Passante*[3].

[1] secare (lat.), schneiden
[2] tangere (lat.), berühren
[3] la passante (frz.), die Vorübergehende

Offensichtlich lässt sich diese Untersuchung auf beliebige Geraden verallgemeinern, sofern sie eine Gleichung der Form $y = mx + t$ besitzen.
Noch nicht berücksichtigt sind Geraden parallel zur y-Achse mit der Gleichung $x = c$:

Aus (I) $\quad y = x^2 \quad$ und $\quad$ (II') $\quad x = c \quad$ folgt
$\quad y = c^2$.

Man erhält also immer einen Schnittpunkt $S(c|c^2)$; die Gerade ist *Sekante*.

Fallunterscheidung für gemeinsame Punkte von Parabel und Gerade
Die Berechnung der Schnittpunktkoordinaten führt auf

I. eine quadratische Gleichung. Ist ihre Diskriminante
- $D > 0$, so gibt es zwei Schnittpunkte; die Gerade ist Sekante;
- $D = 0$, so gibt es zwei zusammenfallende gemeinsame Punkte; die Gerade berührt, sie ist Tangente;
- $D < 0$, so gibt es keinen gemeinsamen Punkt; die Gerade ist Passante.

II. eine lineare Gleichung. Es gibt einen Schnittpunkt; die Gerade ist Sekante.

AUFGABEN

1. Löse grafisch und rechnerisch:

a) $x^2 - 4x - y + 5 = 0$; $\quad x - y + 1 = 0$
b) $x^2 + 2x + y - 2 = 0$; $\quad 2x + y - 1 = 0$
c) $x^2 - x + y - \frac{3}{4} = 0$; $\quad \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{4} = 0$
d) $x^2 - x - y - \frac{7}{4} = 0$; $\quad y - 2 = 0$
e) $\frac{1}{2}x^2 + y + 1 = 0$; $\quad 2x - y + 1 = 0$
f) $2x^2 - 4x - y + 1 = 0$; $\quad x + y - 1 = 0$

2. Löse grafisch und rechnerisch:

a) $x^2 + 2x - y = 0$; $\quad x^2 - 4x - y + 6 = 0$
b) $x^2 + 2x - y = 0$; $\quad -x^2 + 2x - y + 2 = 0$
c) $x^2 - 2x - y = 0$; $\quad \frac{1}{2}x^2 - y - 2 = 0$

3. Bestimme grafisch und rechnerisch die gemeinsamen Punkte der Geraden g mit dem Kreis k: $x^2 + y^2 = 25$!

a) g: $y = \frac{3}{4}x$ $\qquad$ b) g: $y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{2}$ $\qquad$ c) g: $y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

4. Bestimme grafisch und rechnerisch die gemeinsamen Punkte der Parabel p mit dem Kreis k: $x^2 + y^2 = 25$!

a) p: $y = x^2 - 5$ $\qquad$ b) p: $y = x^2 - 13$ $\qquad$ c) p: $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

Was kann man allgemein über die Anzahl der gemeinsamen Punkte eines Kreises mit einer Parabel aussagen?

5. Für welche Werte des y-Abschnittes t der Geraden g ist diese Sekante bzw. Tangente bzw. Passante der Parabel p? Gib die Gleichung der Tangente und den Berührpunkt B an! Fertige eine Zeichnung an!

a) g: $y = x + t$; $\quad$ p: $y = x^2$
b) g: $y = 3x + t$; $\quad$ p: $y = x^2$
c) g: $y = -2x + t$; $\quad$ p: $y = x^2$
d) g: $y = 2x + t$; $\quad$ p: $y = x^2 + 2x$
e) g: $y = -2x + t$; $\quad$ p: $y = -x^2 + 1$
f) g: $y = x + t$; $\quad$ p: $y = x^2 - 2x + 1$

6. Für welche Werte der Steigung m der Geraden g ist diese Sekante bzw. Tangente bzw. Passante der Parabel p? Gib die Gleichungen der Tangenten und die Berührpunkte an! Fertige eine Zeichnung an!

a) g: $y = mx - 1$
   p: $y = x^2$

b) g: $y = mx + 4$
   p: $y = x^2$

c) g: $y = mx + 5$
   p: $y = -x^2 + 1$

d) g: $y = mx + 4$
   p: $y = -x^2 + 2x$

e) g: $y = mx - 3$
   p: $y = x^2 + x - \frac{3}{4}$

f) g: $y = mx + 2$
   p: $y = x^2 - 2x + 2$

7. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme!

a) $x^2 + 4xy = 57$
   $x + y = 7$

b) $xy - 5x = 1$
   $7x - y = 1$

c) $x - y = \frac{3}{2}$
   $xy = 10$

d) $x^2 + y^2 = 20$
   $3x - y = 10$

e) $x^2 - 4x + y^2 = 1$
   $2x - y = 4$

f) $x^2 + y^2 = 4$
   $3x - 4y = -10$

g) $x^2 - 4y^2 = 16$
   $5x - 6y = 16$

h) $x^2 + y^2 = 5$
   $x^2 - y^2 = 1$

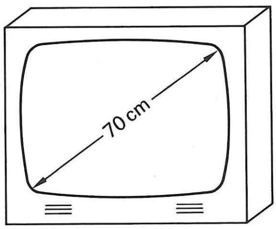
i) $3x^2 + 2y^2 = 1$
   $12x^2 - y^2 = 1$

8. *Geometrisches und arithmetisches Mittel*

Das geometrische Mittel zweier Zahlen ist die Wurzel aus ihrem Produkt, das arithmetische Mittel die halbe Summe.
Bestimme zwei Zahlen, deren geometrisches Mittel 6 und deren arithmetisches Mittel 7,5 ist!

9. *Fernsehbild*

Bei Fernsehbildschirmen verhält sich die Höhe zur Breite wie 3 : 4. Die Größe eines Bildschirms gibt man in Katalogen durch die Länge der Diagonale an. Berechne Höhe und Breite eines „70-cm-Bildes"!

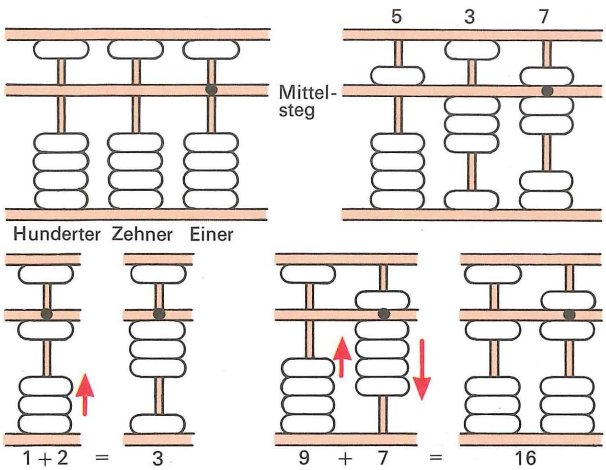


10. *Kiebitzeier*

Die Statuten des Vereins der Getreuen in Jever verpflichteten jedes Mitglied, alljährlich vor dem 29. März eine gewisse Anzahl Kiebitzeier zu sammeln. Von den 105 Eiern, die so alljährlich zusammenkamen, wurden dem Fürsten Bismarck zu seinem Geburtstag am 1. April 101 Stück übersandt. Als plötzlich ein Mitglied starb, mussten, damit 102 Eier zusammenkamen, die Statuten dahin geändert werden, dass jedes Mitglied 2 Eier mehr als früher zu sammeln hatte.
Wie viele Mitglieder hatte der Kiebitz-Verein, und wie viele Eier hatte jedes Mitglied zuletzt zu sammeln?
(Aus „Arithmetik für Gymnasien" von Schubert/Schumpelick, 1908)

Anhang: Taschenrechner-Einführung

Der Abakus



Jede Perle unter dem Mittelsteg hat den Wert 1 und jede Perle über dem Mittelsteg den Wert 5. Eine Perle nimmt den zugeordneten Wert an, wenn sie an den Mittelsteg herangeschoben wird.

Statt 7 zu addieren, addiert man 10 und subtrahiert 3.

Am 12. November 1946 trat ein Japaner mit einem aus wenigen Perlen bestehenden, bereits vor 2000 Jahren von den Römern benützten Abakus[1] *im Schnellrechnen gegen eine elektrische Rechenmaschine an. Im Addieren, Subtrahieren und Dividieren gewann der Japaner. Nur im Multiplizieren war die Rechenmaschine schneller.*
Innerhalb von 13,6 Sekunden addierte der Japaner auf seinem Abakus zehn zehnstellige Zahlen. Heutige elektronische Rechner schaffen das zwar in Bruchteilen einer tausendstel Sekunde, aber die Eingabe von 100 Ziffern und 10 Rechenbefehlen wird wohl selbst von fingerfertigen Menschen nicht in 13,6 Sekunden bewältigt. Dagegen benötigt ein japanischer Könner zum Einstellen, Addieren oder Subtrahieren einer Zahl auf seinem Abakus nur dieselbe Zeit, die man zum Aussprechen braucht.

A. Anzeigeregister X und Rechenregister Y

Der Taschenrechner besitzt ein *Tastenfeld*. Mit den *Zifferntasten* $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, ..., $\boxed{9}$ und dem englischen *Dezimalpunkt* $\boxed{\cdot}$ für unser Dezimalkomma kann man Zahlen eingeben. Betätigt man z. B. nacheinander die Tasten $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cdot}\boxed{3}$, erscheint in der Anzeige 12.3.
Die Ziffern einer Zahl werden der Reihe nach von links nach rechts eingegeben.

Durch Drücken der Tasten wird dem Taschenrechner eine Zahl mitgeteilt, die er in einem *Register*[2] aufbewahrt. Da dieses Register mit der Anzeige verbunden ist, nennt man es *Anzeigeregister* X. Betätigen wir nun die Rechentaste $\boxed{+}$, erhält der

---

[1] Im Altertum Rechenbrett der Ägypter, Griechen und Römer
[2] Speicher für vorübergehende Aufnahme einer Zahl

Taschenrechner den Auftrag, dass er später eine Addition ausführen und das Anzeigeregister X für die Eingabe des 2. Summanden freistellen soll: Die Zahl 12,3 wird in ein zweites Register, das *Rechenregister* Y übertragen. Drücken wir nun die Taste [4], wird 12.3 im Anzeigeregister X gelöscht und 4 aufgenommen. Betätigen wir jetzt die Ergebnistaste [=], addiert der Taschenrechner den Inhalt des X- und des Y-Registers: Das Ergebnis steht im X-Register.

Wir stellen diese grundlegenden Vorgänge noch einmal zusammen:

Eingabe	[1] [2] [·] [3]	[+]	[4]	[=]
X-Register	12.3	12.3	4	16.3
Y-Register	0	12.3	12.3	0[1]

Der Taschenrechner besitzt ein Anzeigeregister X und ein Rechenregister Y. Betätigt man eine Rechentaste, überträgt er den Inhalt des X-Registers in das Y-Register.

B. Die Grundrechenarten

Die Rechentasten für die Grundrechenarten sind [+], [−], [×] und [÷]. Damit man den Taschenrechner zu Beginn jeder Aufgabe startklar machen kann, gibt es eine *Gesamtlöschtaste* [C][2] (von engl. clear, löschen). Durch Drücken der Gesamtlöschtaste wird der Inhalt des X- und des Y-Registers gelöscht.
Ist beim Eingeben einer Zahl ein Tippfehler unterlaufen, verwendet man die *Einzellöschtaste* [CE][3] (von engl. clear entry, Eingabelöschung). Sie löscht nur den Inhalt des X-Registers und erhält den Inhalt des Y-Registers und den vorher eingegebenen Rechenbefehl.

Beispiel: 6 : 3 = mit fehlerhafter Eingabe der 3

Eingabe	[C]	[6]	[÷]	[2]	[CE]	[3]	[=]
X-Register	0	6	6	2	0	3	2
Y-Register	0	0	6	6	6	6	0

[1] Der Inhalt der grau unterlegten Felder hängt vom Taschenrechnertyp ab.

[2] Je nach Taschenrechner auch mit [AC], [CA] (von engl. clear all, alles löschen) bezeichnet

[3] Auch mit [CL], [CLX], [C] bezeichnet

Zur Eingabe negativer Zahlen dient die *Vorzeichenwechseltaste* $\boxed{+/-}$. Betätigt man diese Taste, wird das Vorzeichen der *im X-Register bereits vorhandenen Zahl* umgekehrt.

Beispiel: $2 \cdot (-3) =$

Eingabe	$\boxed{2}$	$\boxed{\times}$	$\boxed{3}$	$\boxed{+/-}$	$\boxed{=}$
X-Register	2	2	3	−3	−6
Y-Register	0	2	2	2	0

Kann eine Kettenrechnung in der Reihenfolge berechnet werden, in der sie eingegeben wird, genügen zum Verarbeiten von jeweils zwei Zahlen das X- und das Y-Register.

Beispiel: $3 \cdot 4 + 5 - 6 =$

Eingabe	$\boxed{3}$	$\boxed{\times}$	$\boxed{4}$	$\boxed{+}$	$\boxed{5}$	$\boxed{-}$	$\boxed{6}$	$\boxed{=}$
X-Register	3	3	4	12	5	17	6	11
Y-Register	0	3	3	12	12	17	17	0

Treten in einer Rechnung Klammern auf oder muss auf Grund der Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung" bei der Berechnung von der Reihenfolge der Eingabe abgewichen werden, sind dafür im Taschenrechner zusätzliche Register vorhanden. Mit der Belegung dieser Klammerregister befassen wir uns nicht. Wir halten nur die *Eingaberegel* fest:

Die Zahlen, Klammern und Rechenzeichen tastet man in der Reihenfolge in den Taschenrechner ein, wie sie im Term auftreten.

C. Kehrwert-, Quadrat-, Wurzel-, Potenztaste

Durch Betätigen der Taste $\boxed{1/x}$ bzw. $\boxed{x^2}$ bzw. $\boxed{\sqrt{x}}$ wird die Zahl, die sich im X-Register befindet, jeweils dieser Rechnung unterworfen. Der Inhalt des Y-Registers ändert sich dadurch nicht.

Beispiele: a) $3 + 4^2 =$

Eingabe	$\boxed{3}$	$\boxed{+}$	$\boxed{4}$	$\boxed{x^2}$	$\boxed{=}$
X-Register	3	3	4	16	19
Y-Register	0	3	3	3	0

b) Auch ohne Klammern kann man $(3+4)^2$ berechnen:

Eingabe	$\boxed{3}$	$\boxed{+}$	$\boxed{4}$	$\boxed{=}$	$\boxed{x^2}$
X-Register	3	3	4	7	49
Y-Register	0	3	3	0	0

Mit der Potenztaste $\boxed{y^x}$ lässt sich der Wert einer Potenz unmittelbar berechnen.

Beispiel: $2^3 =$

Eingabe	$\boxed{2}$	$\boxed{y^x}$	$\boxed{3}$	$\boxed{=}$
X-Register	2	2	3	8
Y-Register	0	2	2	0

D. Der Speicher M

Außer dem X- und dem Y-Register (und den Klammerregistern) besitzt der Taschenrechner noch einen *Speicher*. Ein Speicher ist ein Abstellplatz, ein Speicher des Taschenrechners ein Abstellplatz für Zahlen. Nach dem engl. „memory" (Gedächtnis) bezeichnet man ihn mit M. Er dient zum Ablegen von Zwischenergebnissen, die man später wieder weiterverwendet. Durch das Drücken der *Speichereingabetaste* $\boxed{M}$[1] wird der Inhalt des X-Registers in den Speicher übertragen; außerdem bleibt die Zahl im X-Register erhalten. Durch das Betätigen der *Speicherausgabetaste* $\boxed{MR}$[2] (von engl. memory recall, Gedächtnisabruf) wird der Inhalt des Speichers in das X-Register zurückgerufen. Die Zahl bleibt auch in M erhalten. Durch die Gesamtlöschtaste wird der Speicher M nicht gelöscht. Der Inhalt kann also für aufeinander folgende verschiedene Aufgaben verwendet werden.

E. Grenzen des Taschenrechners

Was geschieht, wenn man mehr Ziffern in das X-Register eingibt, als die Anzeige fassen kann?

Beispiel: Wir tasten die Ziffer 2 so oft ein, bis die Anzeige ausgeschöpft ist, und dann noch zweimal. Von dieser Zahl subtrahieren wir die Zahl, die aus so vielen Ziffern 2 besteht, wie die Anzeige fassen kann. Drücken wir die Ergebnistaste $\boxed{=}$, erhalten wir Null.

[1] Auch $\boxed{Min}$ von engl. memory in, rein ins Gedächtnis, oder $\boxed{STO}$ von engl. store, speichern, oder $\boxed{X \to M}$

[2] Auch $\boxed{RM}$ von engl. recall memory, aus dem Gedächtnis zurückrufen, oder $\boxed{RCL}$ von engl. recall, zurückrufen, oder $\boxed{M \to X}$

Das bedeutet:

> Gibt man über das Fassungsvermögen der Anzeige hinaus noch Ziffern ein, so werden diese vom Taschenrechner nicht registriert.

Was geschieht, wenn das Ergebnis das Fassungsvermögen der Anzeige überschreitet?

1. Beispiel: $600000 \cdot 700000 =$

Für das Ergebnis 420000000000 zeigt der Taschenrechner „4.2 11" an. Das ist offensichtlich eine verstümmelte Form der Potenzschreibweise $4{,}2 \cdot 10^{11}$ der Ergebniszahl.

2. Beispiel: $0{,}000006 \cdot 0{,}000007 =$

Für das Ergebnis 0,000000000042 zeigt der Taschenrechner „4.2 −11" an. Das ist eine verstümmelte Form der Potenzschreibweise $4{,}2 \cdot 10^{-11}$. Sie beschreibt einen Dezimalbruch, der auf der 11. Stelle nach dem Komma die erste von Null verschiedene Ziffer 4 und auf der 12. Stelle 2 stehen hat.

Es bedeutet also: $10^{-1} = \frac{1}{10},\ 10^{-2} = \frac{1}{100},\ 10^{-3} = \frac{1}{1000}, \ldots$

Wird das Fassungsvermögen der Anzeige überschritten[1], so gibt der Taschenrechner das Ergebnis in *Potenzschreibweise* an: Es wird als Produkt einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz dargestellt.

Der Taschenrechner rundet alle unendlichen Dezimalbrüche auf eine bestimmte Stellenzahl. Er rechnet also nur mit Näherungswerten. Deshalb treten Ungenauigkeiten auf. Arbeitet der Taschenrechner mit so vielen Stellen, wie er anzeigt? Wir testen ihn, indem wir einen unendlichen periodischen Dezimalbruch eingeben und die Zahl in der Anzeige subtrahieren.

Beispiel: $10:3 - \underbrace{3{,}3333333}_{\text{8 Stellen}} = 3{,}3 \cdot 10^{-8} = \underbrace{0{,}000000033}_{\text{Fassungsvermögen der Anzeige}}$

Dieser Taschenrechner rechnet also mit 2 Stellen mehr, als er anzeigen kann.

Ein Taschenrechner arbeitet – je nach Typ – mit 1 bis 3 Stellen mehr, als er ausgeben kann. Deshalb werden im Allgemeinen die Rundungsfehler in den nicht angezeigten Stellen versteckt.

AUFGABEN

1. a) $9 \cdot 6$ $99 \cdot 66$ $999 \cdot 666$ $9999 \cdot 6666$

b) $21 \cdot 9$ $321 \cdot 9$ $4321 \cdot 9$ $54321 \cdot 9$

c) $2469136 + 1975308$ $469136 + 197530$ $69136 + 19753$ $9136 + 1975$

[1] Bei manchen Taschenrechnern bereits ab dem Über- oder Unterschreiten einer bestimmten Schwelle.

2. a)
$1 \cdot 8 + 1$
$12 \cdot 8 + 2$
$123 \cdot 8 + 3$
$1234 \cdot 8 + 4$
$12345 \cdot 8 + 5$

b)
$1 \cdot 9 + 2$
$12 \cdot 9 + 3$
$123 \cdot 9 + 4$
$1234 \cdot 9 + 5$
$12345 \cdot 9 + 6$

c)
$1 \cdot 9 + 2$
$21 \cdot 9 + 33$
$321 \cdot 9 + 444$
$4321 \cdot 9 + 5555$
$54321 \cdot 9 + 66666$

3. *Spiegelzahl*
Kehrt man die Reihenfolge der Ziffern einer natürlichen Zahl um, so erhält man ihre Spiegelzahl.
Addiere jeweils zu der folgenden Zahl ihre Spiegelzahl. Wiederhole mit dem Ergebnis das Verfahren so oft, bis schließlich eine Zahl entsteht, die gleich ihrer Spiegelzahl ist.
Beispiel: $39 + 93 = 132$; $132 + 231 = 363$
a) 58 b) 69 c) 97 d) 789 e) 579

4. *Differenz von Zahl und Spiegelzahl*

a) $(752 - 257) : 99$
$(762 - 267) : 99$
$(782 - 287) : 99$

b) $(452 - 254) : 99$
$(552 - 255) : 99$
$(952 - 259) : 99$

c) $(834 - 438) : 99$
$(835 - 538) : 99$
$(837 - 738) : 99$

d) Ist x die Hunderterziffer, y die Zehnerziffer und z die Einerziffer einer dreistelligen natürlichen Zahl, so lässt sich diese in der Form $100x + 10y + z$ darstellen. Gib die entsprechende Darstellung ihrer Spiegelzahl an! Bilde aus Zahl und Spiegelzahl die Differenz! Begründe, dass diese durch 99 teilbar ist!

e) Teste jeweils durch zwei selbst gewählte Zahlenbeispiele, ob bei vier-, fünf-, sechs-, siebenstelligen Zahlen die Differenz aus Zahl und Spiegelzahl durch 99 teilbar ist!

5. Berechne mit dem Taschenrechner, ohne Zwischenergebnisse zu notieren:

a) $[(2{,}014 + 7{,}35) \cdot (42{,}382 - 4{,}882) - 51{,}15] : [61 + (7{,}035 - 4{,}9278) : 0{,}0048]$

b) $\dfrac{[(57{,}85 - 42{,}382) : (2{,}753 - 2{,}633) - 8{,}9] : (17{,}3 \cdot 0{,}9 - 3{,}07)}{[(23{,}8 - 16{,}5) \cdot 5{,}625 + (24{,}4375 - 23{,}5)] : (3{,}8 - 0{,}3)}$

6. *Kettenbrüche*
Berechne mithilfe der $\boxed{1/x}$-Taste die Kettenbrüche a) bis d), indem du jeweils „rechts unten" beginnst! Runde auf 4 Dezimalstellen!

a) $1 + \frac{1}{2}$

b) $1 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}$

c) $1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$

d) $1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$

e) $1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}$

f) Im Nenner wird, mit 2 beginnend, jeweils ein Kehrbruch gebildet, dann wird 2 addiert, dann wird wieder der Kehrbruch gebildet, ... Führe das mit dem Taschenrechner so lang aus, bis sich in der Anzeige der Wert des Kehrbruchs nicht mehr ändert! Addiere erst dann 1! Vergleiche das Ergebnis mit dem Näherungswert des Taschenrechners für $\sqrt{2}$!

7. Berechne folgende Kettenbrüche! Vergleiche die Ergebnisse mit dem im Taschenrechner gespeicherten Wert für die Kreiszahl π!

a) $3 + \frac{1}{7}$

b) $3 + \dfrac{1}{7 + \frac{1}{15}}$

c) $3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{15 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{292}}}}$

8. a) 11^2, 111^2, 1111^2, 11111^2

b) $(3+1)^2-1$, $(33+1)^2-1$, $(333+1)^2-1$, $(3333+1)^2-1$

c) $(6+1)^2-1$, $(66+1)^2-1$, $(666+1)^2-1$, $(6666+1)^2-1$

9. a) 11^3, 101^3, 111^3

b) $(5+1+2)^3$, $(5+8+3+2)^3$, $(1+9+6+8+3)^3$

c) $(6+1+4+6+5+6)^4$, $(1+7+2+1+0+3+6+8)^5$, $(3+4+0+1+2+2+2+4)^6$

10. *Zweierpotenzen*

a) Berechne die Zweierpotenzen $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{16}$!

b) Welche Regelmäßigkeit kann man für die Einerziffer beobachten? Welche Einerziffer besitzt 2^{1991}?

c) Berechne $1+2^1+2^2+2^3+\dots+2^{15}$! Vergleiche die Zwischenergebnisse jeweils mit den Werten der Zweierpotenzen von a)!

d) Berechne $1+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\dots+(-2)^{15}$!

e) Berechne $1+(\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\dots+(\frac{1}{2})^{15}$!

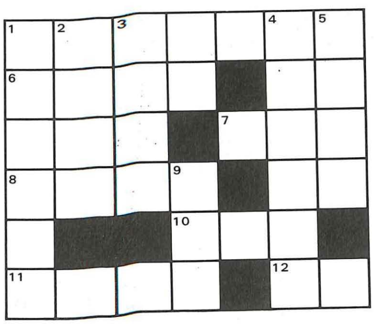
11. *Notwendiges Runden*

a) Mit einem Lineal werden die Länge eines DIN A5-Blatts zu $l = 21{,}1$ cm und die Breite zu $b = 14{,}8$ cm auf 1 mm genau gemessen. Das heißt für die wahre Länge l bzw. die wahre Breite b gilt: $21{,}05 \text{ cm} \leqq l \leqq 21{,}15$ cm bzw. $14{,}75 \text{ cm} \leqq b \leqq 14{,}85$ cm. Berechne den kleinst- und den größtmöglichen Flächeninhalt A des Blatts. Berechne das Produkt der beiden Messwerte. Auf wie viele Stellen genau wird man diesen Wert für A runden?

b) Die Länge des Asphaltbelags eines Straßenteils wird zu $l = 940{,}7$ m und die Breite zu $b = 7{,}3$ m auf 1 dm genau gemessen. Berechne den kleinst- und den größtmöglichen Wert für den Flächeninhalt A. Gib für A einen sinnvollen Näherungswert an!

12. *Kreuzworträtsel*

Zeichne das rechts dargestellte Rätsel in dein Heft. Berechne die Aufgabe zunächst mit dem Taschenrechner; drehe ihn anschließend um 180°; trage das nun lesbare Wort ein!



Waagrecht

(1) $60 \cdot [2+3^2 \cdot 5 \cdot (38^2+3)] - 2$

(6) $1+3 \cdot [4 \cdot (2 \cdot 3^2)^2 - 2]$

(7) $2^3 \cdot (6 \cdot \sqrt{1+2^5 \cdot 3^2} - 1)$

(8) $3^2 \cdot (28^2+6^2-3)$

(10) $3^3 \cdot \sqrt{1+5 \cdot 3^2 \cdot 2^3}$

(11) $-1-3 \cdot (2-2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$

(12) $\sqrt{(6^2+8^2+24^2):4}$

Senkrecht

(1) $11^2 \cdot (3^2 \cdot 19^2+5)+4$

(2) $2^6 \cdot 3^4 - (57^2-54^2):111$

(3) $11^3+12^3+\sqrt{29^2-20^2}$

(4) $2^3 \cdot (2 \cdot 149^2-17)-1$

(5) $31 \cdot (2^2 \cdot 31 - 1)$

(9) $\sqrt{2^5 \cdot 21 \cdot (2^3 \cdot 21+1)+1}$

Sach- und Namenverzeichnis

Bayerischer
Schulbuch Verlag
München

3745 2

ISBN 3-7627-3745-2

9 783762 737452