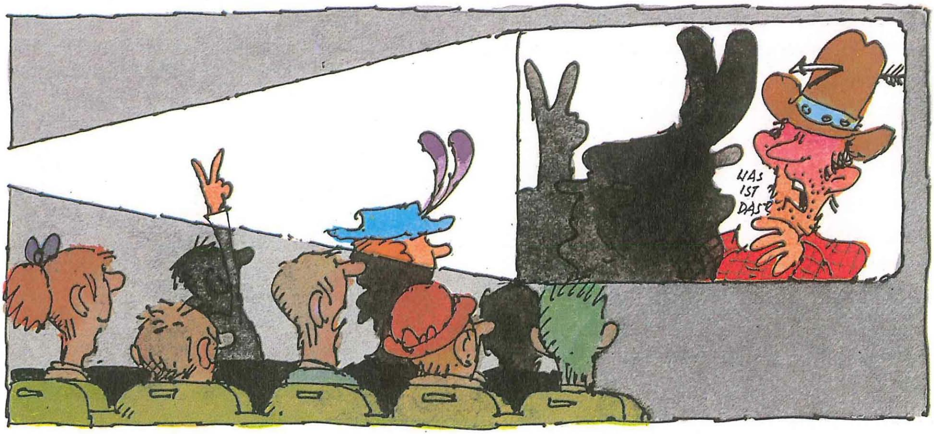
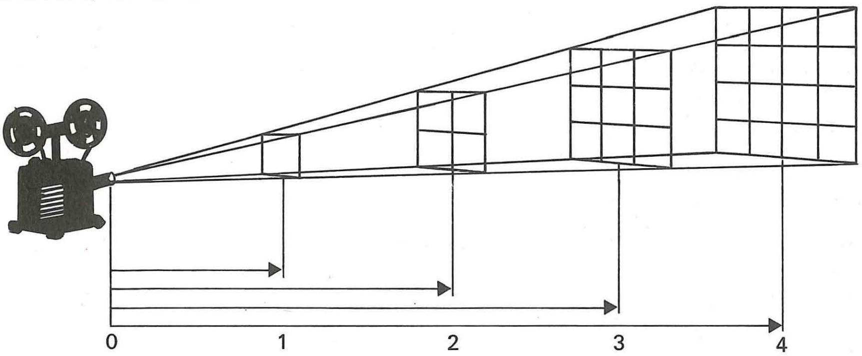
§12 Einfache quadratische Funktionen



Im Kino

Durch Schwebstaub in der Luft wird in einem Kino das Lichtbündel sichtbar. Die Größe des Bildes ist vom Abstand des Projektors von der Leinwand und von der Brennweite des Objektivs abhängig. Wie ändert sich bei unveränderter Brennweite der Flächeninhalt des Bildes, wenn der Abstand Projektor-Leinwand verdoppelt, verdreifacht, ... wird?

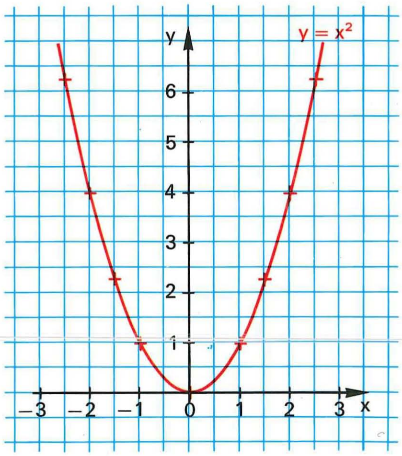


A. Die Quadratfunktion

Zu jeder reellen Zahl x gibt es *genau ein* Quadrat x^2. Folglich ist die *Zuordnung* $x \mapsto x^2$ *eindeutig* und damit eine *Funktion*. Man nennt sie *Quadratfunktion*. Sie wird durch den *Funktionsterm* $f(x) = x^2$ oder durch die *Funktionsgleichung* $y = x^2$ beschrieben. Die Menge ihrer x-Werte, die *Definitionsmenge* D, ist – wenn keine Einschränkung angegeben ist – die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Da für beliebige reelle Zahlen das Quadrat x^2 einer Zahl x gleich dem Quadrat $(-x)^2$ der Gegenzahl $-x$ ist, verläuft der Graph der Quadratfunktion symmetrisch zur y-Achse. Sein tiefster Punkt heißt *Scheitel*. Er liegt im Koordinatenursprung.

Jede zu diesem Graphen kongruente Kurve nennt man *Normalparabel*. Der Graph der Quadratfunktion ist also eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel im Ursprung.
Für $x > 0$ ist die Quadratfunktion monoton wachsend, für $x < 0$ monoton abnehmend.
Alle Funktionswerte der Quadratfunktion sind nichtnegativ. Gibt man einen beliebigen nichtnegativen y-Wert vor, so ist dieser das Quadrat von $\sqrt{y}$ und von $-\sqrt{y}$. Die Menge der Funktionswerte y, die *Wertemenge* der Quadratfunktion, ist also die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen: $W = \mathbb{R}_0^+$



B. Die Funktion $x \mapsto x^2 + q$

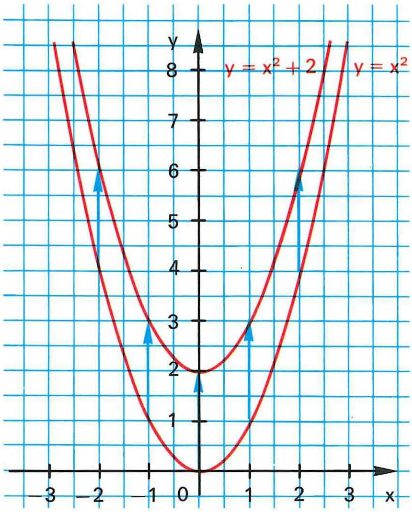
Tritt im Funktionsterm außer x^2 noch ein lineares Glied px oder auch ein konstantes Glied q auf, so heißt die Funktion *quadratische Funktion*.

Beispiel:
$x \mapsto x^2 + 2; \quad x \in \mathbb{R}$

Wertetabelle:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$x^2 + 2$	11	6	3	2	3	6	11

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 + 2$ um 2 größer als x^2. Somit geht der Graph der Funktion $x \mapsto x^2 + 2$ durch eine Verschiebung um 2 Einheiten nach oben aus dem Graphen der Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ hervor: Der Graph der Funktion $x \mapsto x^2 + 2;\ x \in \mathbb{R}$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(0|2)$.

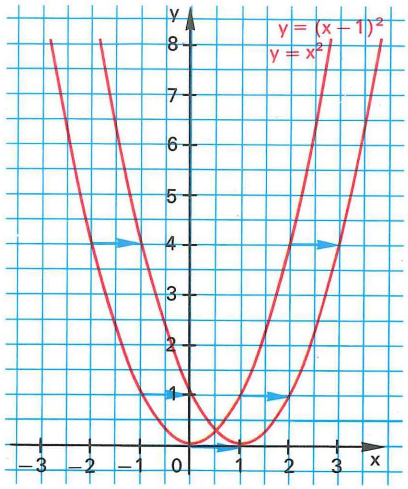


Die für die Funktion $x \mapsto x^2 + q$ im Fall $q = 2$ angestellten Überlegungen lassen sich auf jedes beliebige $q \in \mathbb{R}$ übertragen:

> Der Graph der Funktion $x \mapsto x^2 + q;\ x \in \mathbb{R}$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(0|q)$.

C. Die Funktionen $x \mapsto (x - x_s)^2$

Auch der Graph einer Funktion der Form $x \mapsto (x - x_s)^2$ ist eine Normalparabel.



Beispiel:
$x \mapsto (x-1)^2; \quad x \in \mathbb{R}$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4

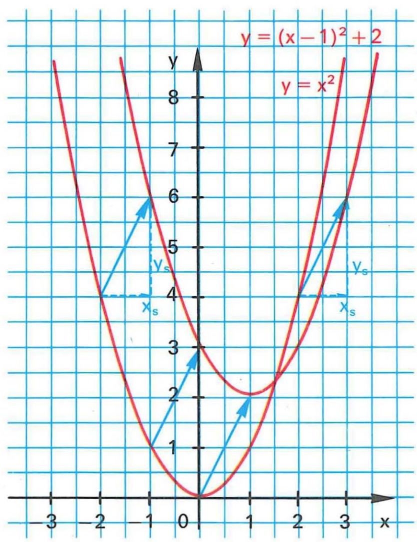
Die dritte Zeile der Wertetabelle geht aus der zweiten Zeile hervor, wenn man diese um eine Einheit nach rechts verschiebt. Somit ist der Graph der Funktion $x \mapsto (x-1)^2$ eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(1|0)$.

Die für die Funktion $x \mapsto (x - x_s)^2$ im Fall $x_s = 1$ angestellten Überlegungen lassen sich auf jedes beliebige $x_s \in \mathbb{R}$ übertragen:

> Der Graph der Funktion $x \mapsto (x - x_s)^2$; $x \in \mathbb{R}$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(x_s|0)$.

D. Die Funktion $x \mapsto (x - x_s)^2 + y_s$

Der Graph einer Funktion der Form $x \mapsto (x - x_s)^2 + y_s$ ist ebenfalls eine Normalparabel, deren Scheitel im Allgemeinen aber nicht auf einer Koordinatenachse liegt.



Beispiel:
$x \mapsto (x-1)^2 + 2; \quad x \in \mathbb{R}$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4
$(x-1)^2+2$	18	11	6	3	2	3	6

Die dritte Zeile der Tabelle geht wiederum aus der zweiten Zeile durch eine Verschiebung um eine Einheit nach

rechts hervor. Der Summand $+2$ im Funktionsterm bewirkt, dass alle Funktionswerte in der vierten Zeile um 2 größer sind als jene der dritten Zeile.
Somit ist der Graph der Funktion $x \mapsto (x-1)^2+2$ eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(1|2)$.

Die für die Funktion $x \mapsto (x-x_s)^2+y_s$ im Fall $x_s=1$ und $y_s=2$ angestellten Überlegungen lassen sich auf beliebige $x_s, y_s \in \mathbb{R}$ übertragen:

Der Graph der Funktion $x \mapsto (x-x_s)^2+y_s$; $x \in \mathbb{R}$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(x_s|y_s)$.

E. Scheitelbestimmung durch quadratische Ergänzung

Der Graph der Funktion $x \mapsto (x-x_s)^2+y_s$ ist für alle x_s, $y_s \in \mathbb{R}$ eine nach oben geöffnete Normalparabel. Der Scheitel ist der tiefstgelegene Punkt, d. h. jener Punkt, dessen y-Koordinate am kleinsten ist. Den kleinsten Funktionswert erhält man, wenn in der Funktionsgleichung $y=(x-x_s)^2+y_s$ das Quadrat den Wert Null annimmt. Das tritt für $x=x_s$ ein, und dann ist $y=y_s$. Somit sind x_s und y_s die Koordinaten des Scheitels.
Durch quadratische Ergänzung kann die Gleichung $y=x^2+px+q$ einer quadratischen Funktion auf die *Scheitelform* $y=(x-x_s)^2+y_s$ gebracht werden.

Beispiel:
$$\begin{aligned} y = x^2+4x+3 &= x^2+4x+2^2-2^2+3 = \\ &= (x+2)^2-4+3=(x+2)^2-1= \\ &= (x-(-2))^2-1 \end{aligned}$$

Der Graph der Funktion $x \mapsto x^2+4x+3$ ist somit eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(-2|-1)$.

Bei der quadratischen Gleichung haben wir die quadratische Ergänzung auf beiden Seiten der Gleichung addiert. Damit bei einer Termumformung ein äquivalenter Term entsteht, müssen wir dagegen die quadratische Ergänzung für das vollständige Quadrat addieren und anschließend zum Ausgleich wieder subtrahieren.
Die entsprechende Umformung führt auch im allgemeinen Fall zum Ziel:

$$\begin{aligned} y = x^2+px+q &= x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q = \\ &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q = \\ &= \left(x-\left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2+q-\frac{1}{4}p^2 \end{aligned}$$

Da die Normalparabel nach oben geöffnet ist, nimmt die Funktion nur y-Werte an, die größer oder gleich dem y-Wert $q-\frac{1}{4}p^2$ des Scheitels sind.

Damit ist bewiesen:

Satz

> Der Graph der quadratischen Funktion $x \mapsto x^2 + px + q$; $x \in \mathbb{R}$ ist eine nach oben geöffete Normalparabel mit dem Scheitel $S\left(-\frac{p}{2}\middle| q - \frac{1}{4}p^2\right)$.
> Die Wertemenge der Funktion ist $W = [q - \frac{1}{4}p^2; \infty[$.

AUFGABEN

1. Stelle für die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ eine Wertetabelle für das Intervall $[-3; 3]$ mit der Schrittweite 0,2 auf und zeichne den Graphen sorgfältig auf Millimeterpapier. Klebe die Zeichnung auf einen dünnen, festen Karton und schneide eine Schablone für die Normalparabel aus.

2. Erstelle für folgende Funktionen Wertetabellen für das Intervall $[-3; 3]$ mit der Schrittweite 0,5 und zeichne den Graphen. Gib jeweils die Scheitelkoordinaten an!

a) $x \mapsto x^2 + 1$ b) $x \mapsto x^2 - 1$ c) $x \mapsto x^2 - 2$
d) $x \mapsto (x+1)^2$ e) $x \mapsto (x-0{,}5)^2$ f) $x \mapsto (x+0{,}5)^2$
g) $x \mapsto (x+1)^2 + 2$ h) $x \mapsto (x-0{,}5)^2 - 3$ i) $x \mapsto (x+0{,}5)^2 - 4$

3. Entnimm der Funktionsgleichung die Koordinaten des Parabelscheitels und zeichne die Parabel mithilfe der Schablone!

a) $y = x^2 - 2$ b) $y = (x-3)^2$ c) $y = (x-2)^2 - 3$
d) $y = x^2 + 2$ e) $y = (x+3)^2$ f) $y = (x+2)^2 + 3$
g) $y = (x+3)^2 - 2$ h) $y = (x-3)^2 + 2$ i) $y = (x+2)^2 - 3$

4. Wie lautet die Gleichung der quadratischen Funktion $x \mapsto x^2 + px + q$, deren Graph den Punkt S als Scheitel besitzt?

a) $S(2|5)$ b) $S(2|-5)$ c) $S(-2|5)$ d) $S(-2|-5)$
e) $S(0|-3)$ f) $S(-3|0)$ g) $S(-5|-3)$ h) $S(-0{,}5|2{,}5)$

5. Bestimme für folgende quadratische Funktionen die Scheitelkoordinaten und zeichne den Graphen!

a) $x \mapsto x^2 + 4x + 4$ b) $x \mapsto x^2 + 4x + 1$ c) $x \mapsto x^2 + 4x$
d) $x \mapsto x^2 + 8x + 13$ e) $x \mapsto x^2 - 6x + 8$ f) $x \mapsto x^2 - 2x - 1$
g) $x \mapsto x^2 + x + \frac{1}{4}$ h) $x \mapsto x^2 - 3x + \frac{11}{4}$ i) $x \mapsto x^2 + 5x + \frac{15}{4}$
k) $x \mapsto x^2 - \frac{1}{2}x$ l) $x \mapsto x^2 + \frac{10}{3}x$ m) $x \mapsto x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{9}$

6. Erstelle für folgende Funktionen Wertetabellen und zeichne die Graphen!

a) $x \mapsto (3-x)^2$ b) $x \mapsto (2-x)^2$ c) $x \mapsto (-2-x)^2$

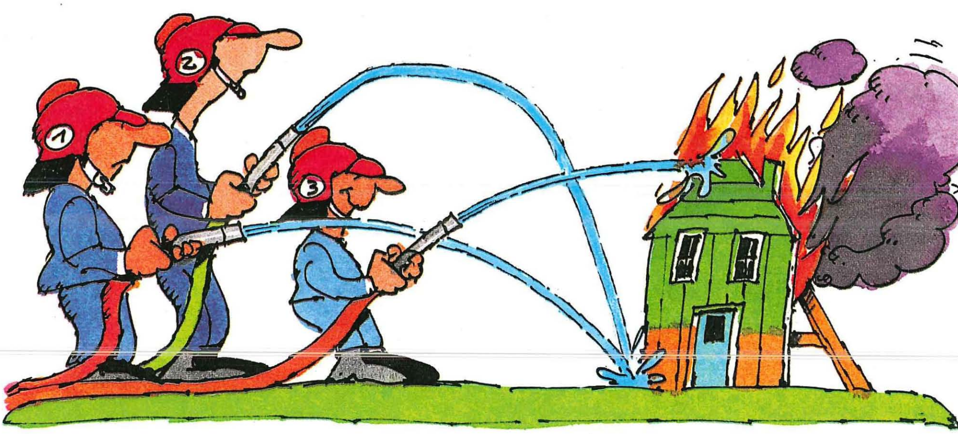
Gib jeweils einen äquivalenten Funktionsterm an!

7. Ermittle für folgende Funktionen im angegebenen Intervall I den kleinsten und den größten Funktionswert!

a) $x \mapsto x^2 - 2$; $I = [-2; 3]$ b) $x \mapsto (x-1)^2 - 2$; $I = [-3; 3]$
c) $x \mapsto x^2 - 4x + 3$; $I = [-3; 3]$ d) $x \mapsto x^2 - 4x$; $I = [0; 2]$

In welchen Teilintervallen von I ist die Funktion jeweils monoton wachsend bzw. monoton abnehmend?

§ 13 Die allgemeine quadratische Funktion



Wurfparabeln

Galileo Galilei (geb. 1564 in Pisa, gest. 1642 in Arcetri bei Florenz) entdeckte die Gesetze des freien Falls. Er erkannte, dass die Bahnkurve eines schräg nach oben geworfenen oder geschossenen Körpers eine nach unten geöffnete Parabel ist. Damit wurde die Parabel zum ersten Mal zur Beschreibung eines Naturvorgangs verwendet; zuvor hatte man nur auf Geraden und Kreise zurückgegriffen.

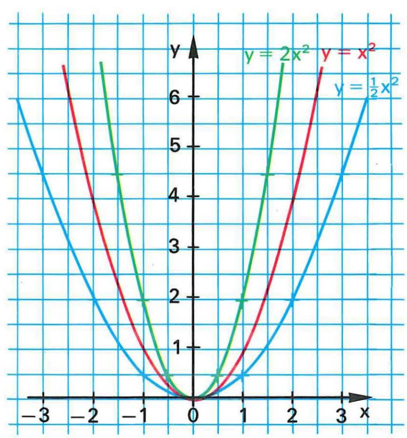
A. Die Funktion $x \mapsto ax^2$

In den bisher behandelten Fällen war der Graph einer quadratischen Funktion stets eine nach oben geöffnete Normalparabel. Für quadratische Funktionen der Form $x \mapsto ax^2$ gilt das nicht mehr. Ihre Graphen heißen *Parabeln*.

Beispiele:
$x \mapsto 2x^2$ und $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

Wertetabelle:

x	0	0,5	1	1,5	2	3
x^2	0	0,25	1	2,25	4	9
$2x^2$	0	0,5	2	4,5	8	18
$\frac{1}{2}x^2$	0	0,125	0,5	1,125	2	4,5

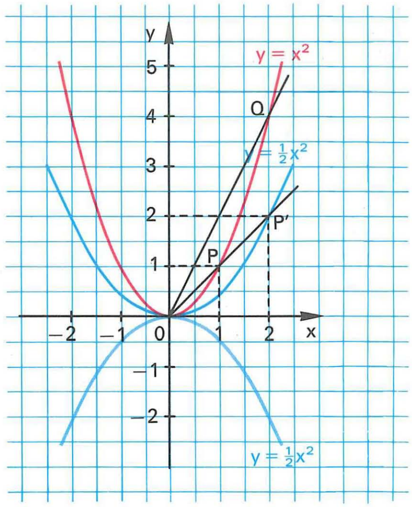


Die Parabel $y = 2x^2$ erhält man aus der Normalparabel $y = x^2$ durch eine Streckung der Ordinaten mit dem Faktor 2 in Richtung der y-Achse, die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ durch eine Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$. Die Punkte der x-Achse bleiben dabei fest.

Es gibt somit Parabeln, die nicht kongruent sind. Andererseits sind jedoch alle Parabeln ähnlich.

Beispiel:

Die Normalparabel $y = x^2$ kann durch eine zentrische Streckung auf die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ abgebildet werden: Der Punkt $P(1|1)$ besitzt bei der Streckung mit dem Zentrum $Z(0|0)$ und dem Faktor 2 den Bildpunkt $P'(2|2)$; dessen Koordinaten erfüllen die Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$. Durch die genannte Abbildung wird $Q(2|4)$ auf $Q'(4|8)$ abgebildet; dessen Koordinaten erfüllen ebenfalls die Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ usw.



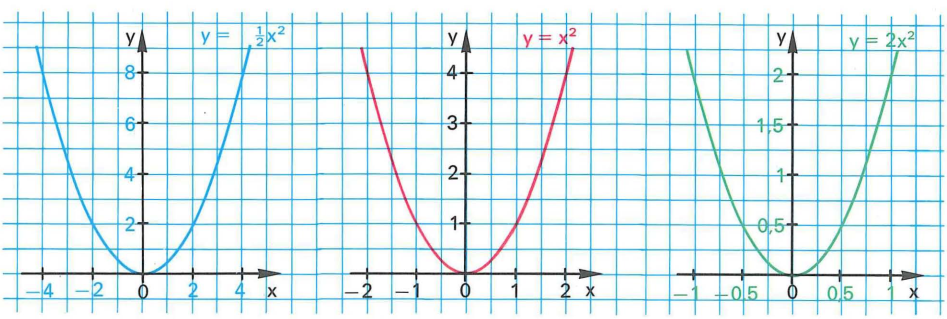
Der Graph von $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Man erhält sie durch Spiegelung des Graphen von $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ an der x-Achse.

Alle Parabeln haben die gleiche Form. Daraus folgt: Bei geeigneter Wahl der Einheit für das Koordinatensystem ist es sogar möglich, jede Parabel mit der Schablone der Normalparabel zu zeichnen.

Beispiele:

$x \mapsto 2x^2$ und $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

Bei der Normalparabel $y = x^2$ ist für $x_1 = 1$ auch der Funktionswert $y_1 = 1$. Um die Einheit für die anderen Parabeln zu finden, suchen wir den positiven x-Wert der Parabel, der gleich dem zugehörigen y-Wert ist: Bei der Parabel $y = 2x^2$ ist das für 0,5 der Fall, bei der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ für 2.



Zur Kontrolle lesen wir die Wertepaare der Wertetabelle an den gezeichneten Parabeln ab.

Wir fassen zusammen:

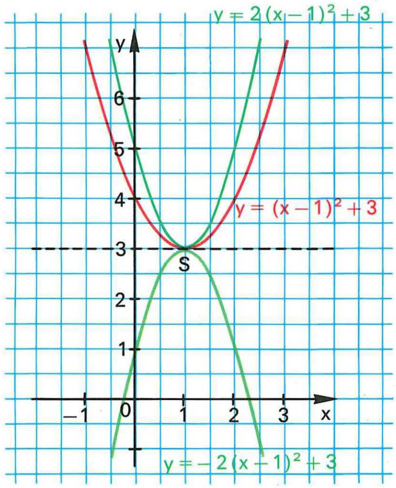
Der Graph der Funktion $x \mapsto ax^2$; $(a \neq 0)$ heißt Parabel. Ihr Scheitel liegt im Ursprung.
Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet.
Für $|a| > 1$ ist die Parabel enger, für $|a| < 1$ weiter als die Normalparabel.
Alle Parabeln sind ähnlich.

B. Die allgemeine quadratische Funktion

Der Term $ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ ist das allgemeine quadratische Polynom in x. Man definiert entsprechend:

Die Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$; $x \in \mathbb{R}$ heißt *allgemeine quadratische Fuhktion.*

Ihr Graph ist eine Parabel. Der Scheitel kann durch quadratische Ergänzung bestimmt werden.



Beispiel:

$$
\begin{aligned}
x \mapsto f(x) &= -2x^2 + 4x + 1 = \\
&= -2[x^2 - 2x] + 1 = \\
&= -2[x^2 - 2x + 1^2 - 1^2] + 1 = \\
&= -2[(x-1)^2 - 1] + 1 = \\
&= -2(x-1)^2 + 2 + 1 = \\
&= -2(x-1)^2 + 3
\end{aligned}
$$

Aus dieser Form des Funktionsterms kann man ablesen: Der Graph von $x \mapsto f(x)$ besitzt wie die Normalparabel $y = (x-1)^2 + 3$ den Scheitel $S(1|3)$. Der Faktor -2 im Funktionsterm bewirkt eine Streckung mit dem Faktor 2 in Richtung der y-Achse und eine Spiegelung an der Parallelen zur x-Achse durch S.

Durch quadratische Ergänzung kann jede allgemeine quadratische Funktion

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

in die Scheitelform

$$x \mapsto a(x - x_s)^2 + y_s$$

gebracht werden. Ihr Graph ist eine Parabel mit dem Scheitel $S(x_s|y_s)$.
Für $a > 0$ ist sie nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet. Die Parabel ist kongruent zur Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$.

C. Nullstellen

Wichtige Punkte einer Parabel sind, außer dem Scheitel, gemeinsame Punkte mit der x-Achse; sie haben die y-Koordinate Null.

Definition:

> x_1 heißt *Nullstelle* einer Funktion, wenn der zugehörige Funktionswert $y_1 = 0$ ist.

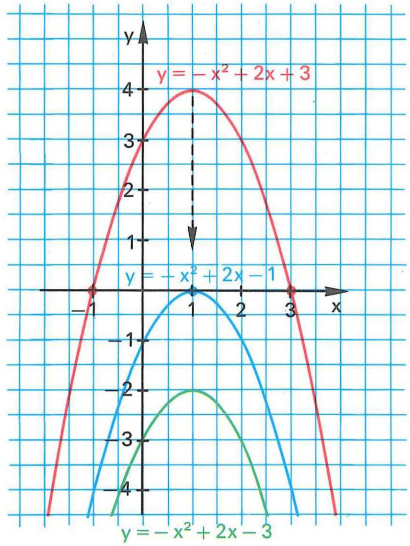
Nullstellen können grafisch (im Rahmen der Zeichengenauigkeit) oder rechnerisch bestimmt werden. Der grafische Weg ist allerdings nur dann zweckmäßig, wenn die Parabel schon gezeichnet vorliegt.

1. Beispiel:

$x \mapsto f(x) = -x^2 + 2x + 3$

Grafische Lösung:

$f(x) = -(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 3 =$
$\quad = -(x-1)^2 + 4$



Der Graph, die nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel S (1 | 4), schneidet die x-Achse in zwei Punkten. An ihnen liest man die Nullstellen ab:
$x_1 = -1;\ x_2 = 3$

Rechnerische Lösung:

$-x^2 + 2x + 3 = 0$

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$

$x_1 = -1;\ x_2 = 3$

2. Beispiel:

$x \mapsto f(x) = -x^2 + 2x - 1$

Grafische Lösung:

$f(x) = -(x-1)^2$

Der Graph, die nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel S (1 | 0), berührt die x-Achse; man erhält eine Nullstelle. Man kann sich diese Parabel aus der des 1. Beispiels durch eine Verschiebung in der negativen y-Richtung entstanden denken. Dabei rücken die beiden Nullstellen einander immer näher und fallen schließlich zusammen. Daher liegt es nahe, hier von *zwei zusammenfallenden Nullstellen* zu sprechen:
$x_1 = x_2 = 1$

Rechnerische Lösung:

$-x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x_{1;2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

3. Beispiel: $x \mapsto f(x) = -x^2 + 2x - 3$

Grafische Lösung:

$f(x) = -(x-1)^2 - 2$

Der Graph, die nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(1|-2)$, meidet die x-Achse; es gibt keine Nullstelle.

Rechnerische Lösung:

$-x^2 + 2x - 3 = 0$

Da hier die Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8 < 0$ ist, gibt es keine Nullstellen.

Zusammenfassung:

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$	sind	die Nullstellen der quadratischen Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$.
Besitzt die Gleichung	so	hat die Funktion
1. zwei verschiedene Lösungen		zwei verschiedene Nullstellen; der Graph schneidet die x-Achse;
2. eine Lösung (zwei zusammenfallende Lösungen)		eine Nullstelle (zwei zusammenfallende Nullstellen); der Graph berührt die x-Achse;
3. keine Lösung		keine Nullstelle; der Graph meidet die x-Achse.

AUFGABEN

1. Erstelle für das Intervall $[-3; 3]$ Wertetabellen für folgende Funktionen und zeichne die Graphen in ein Koordinatensystem!

a) $x \mapsto \frac{1}{3}x^2$; $x \mapsto 3x^2$; $x \mapsto -\frac{1}{3}x^2$; $x \mapsto -3x^2$

b) $x \mapsto 0{,}4x^2$; $x \mapsto 2{,}5x^2$; $x \mapsto -0{,}4x^2$; $x \mapsto -2{,}5x^2$

2. Bestimme zu jeder Parabel die positive x-Koordinate, die gleich der zugehörigen y-Koordinate ist. Zeichne nach Wahl der geeigneten Einheit für das Koordinatensystem die Parabel mit der Schablone für die Normalparabel!

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ b) $y = 4x^2$ c) $y = \frac{1}{5}x^2$ d) $y = 5x^2$

3. Zeichne die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$. Bestimme den Scheitel des Graphen der folgenden quadratischen Funktionen. Zeichne den Graphen mithilfe der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$!

a) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3$ b) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$ c) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x$

d) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$ e) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 9$ f) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

4. Bestimme die Gleichungen der quadratischen Funktionen, die einen zur Parabel $y = \frac{1}{4}x^2$ kongruenten Graphen mit dem Scheitel S besitzen!

a) $S(3|0)$ b) $S(3|-2)$ c) $S(-1{,}5|2{,}5)$ d) $S(-2{,}5|-1{,}5)$

5. Bestimme den Scheitel und zeichne die Parabel! Ermittle die Nullstellen grafisch und rechnerisch!

a) $x \mapsto -x^2 + 3x + 4$ b) $x \mapsto -x^2 + 3x - 2{,}25$ c) $x \mapsto -x^2 + 3x - 4$
d) $x \mapsto -x^2 - 2x + 4$ e) $x \mapsto -x^2 + x + 1$ f) $x \mapsto -x^2 - 5x - 4$
g) $x \mapsto -x^2 - x - \frac{1}{4}$ h) $x \mapsto -x^2 + x + \frac{5}{4}$ i) $x \mapsto -x^2 - x + \frac{5}{4}$

6. Bestimme den Scheitel, erstelle eine Wertetabelle und zeichne die Parabel! Ermittle die Nullstellen grafisch und rechnerisch!

a) $x \mapsto 2x^2 - 4x - 2$ b) $x \mapsto -2x^2 - 8x - 3{,}5$ c) $x \mapsto -2x^2 + 12x - 18$
d) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x$ e) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - x$ f) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$
g) $x \mapsto \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{1}{4}$ h) $x \mapsto -\frac{1}{3}x^2 + x - 2$ i) $x \mapsto -\frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$

7. Bestimme die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ der Parabel, die den Scheitel S besitzt und durch den Punkt P verläuft! (Hinweis: Gehe von der Scheitelform aus.)

a) $S(0|0)$, $P(2|8)$ b) $S(0|1)$, $P(2|3)$ c) $S(0|2)$, $P(3|-1)$
d) $S(1|0)$, $P(3|8)$ e) $S(-2|0)$, $P(1|-3)$ f) $S(2|1)$, $P(4|5)$
g) $S(-2|1)$, $P(-4|3)$ h) $S(-1|-2)$, $P(-3|-4)$ i) $S(-2|3)$, $P(1|0)$

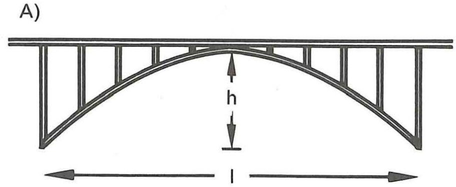
8. *Die Kettenlinie*
Eine zwischen den beiden Punkten $A(-5|10)$ und $B(5|10)$ frei herabhängende Kette beschreibt eine Kurve, die man Kettenlinie nennt. Diese verläuft außerdem durch die Punkte mit folgenden Koordinaten:

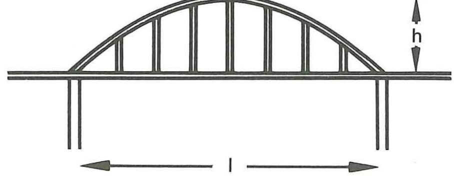
x	0	1	2	3	4
y	0	0,25	1,1	2,7	5,4

a) Zeichne die Kettenlinie zwischen A und B!
b) Untersuche, ob die Kettenlinie eine Parabel ist: Stelle dazu die Gleichung der Parabel durch A, B und den Ursprung 0 auf. Berechne zu den x-Werten der Tabelle die y-Werte der Parabel. Zeichne diese in das Koordinatensystem von a) ein!

9. *Bogenbrücken*

a) Die Spannweite des parabelförmigen Brückenträgers A) beträgt $l = 100$ m, seine Höhe $h = 25$ m. Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und bestimme die Gleichung der Parabel! Die Streben zwischen dem Bogen und der Fahrbahn haben einen Abstand von 10 m. Berechne ihre Längen!
b) Bearbeite die Aufgaben von a) für den parabelförmigen Brückenträger B), der die Spannweite $l = 80$ m und die Höhe $h = 20$ m besitzt.

A)


B)


10. *Luftwiderstand*

Der Luftwiderstand y Newton eines Autos hängt von seiner Form, seiner angeströmten Querschnittsfläche und dem Quadrat der Geschwindigkeit x km/h ab: $y = ax^2$ (a: Parameter für Form und Querschnittsfläche)

a) Eine mit dem „Audi 100" in der Größe vergleichbare Limousine der 70er Jahre besitzt bei 50 km/h den Luftwiderstand 115 N. Bestimme a!

b) Der „Audi 100" war der Vorreiter zur deutlichen Verringerung des Luftwiderstandes der Serienautos. Bei 100 km/h hat er den Luftwiderstand 280 N. Bestimme a!

c) Lege eine Wertetabelle an und zeichne die Parabeln für beide Fahrzeuge in ein Koordinatensystem! ($x \leqq 140$)

d) Wie verhalten sich die Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge, wenn sie den gleichen Luftwiderstand besitzen?

11. *Kraftstoffverbrauch*

Der bewegungshemmende Widerstand eines Autos setzt sich aus dem Luftwiderstand und dem durch Reibung hervorgerufenen Rollwiderstand zusammen. Der Luftwiderstand ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit x km/h, der Rollwiderstand ist näherungsweise unabhängig von der Geschwindigkeit. Deshalb setzen wir näherungsweise für den Kraftstoffverbrauch y Liter für 100 km an: $y = ax^2 + c$

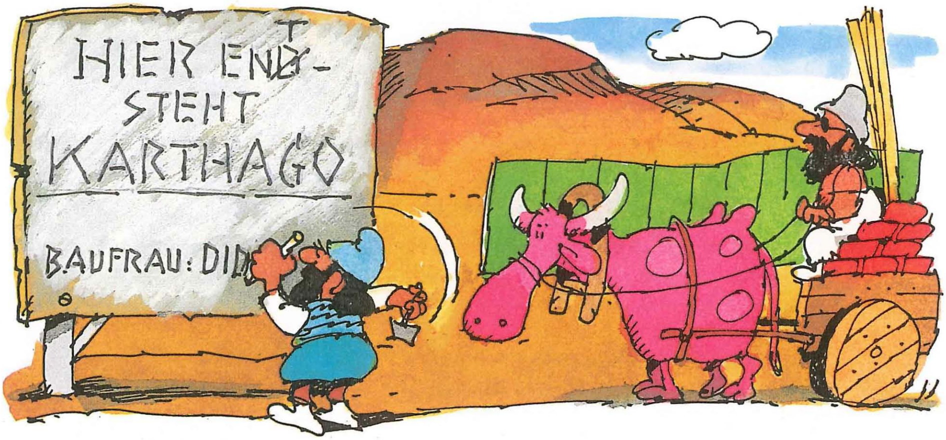
a) Ein „VW Golf D" hat folgende Verbrauchswerte: (30 km/h | 3,0 l) und (120 km/h | 7,7 l). Bestimme a und c!

b) Ein „Audi 100" hat folgende Werte: (30 km/h | 4,6 l) und (140 km/h | 9,0 l). Bestimme a und c!

c) Zeichne zu beiden Fahrzeugen die Parabeln in ein Koordinatensystem! Welche Parabel verläuft flacher? Warum?

d) Wie viel Prozent Kraftstoff kann man bei jedem Fahrzeug sparen, wenn man auf der Autobahn anstatt mit 130 km/h mit 100 km/h fährt?

§14 Extremwertaufgaben



Die Sage von der Gründung Karthagos im 9. Jh. v. Chr.

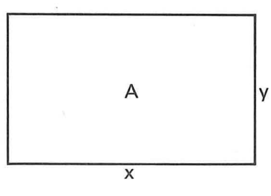
Die syrische Königstochter Dido floh vor ihrem Bruder, der ihren Gatten ermordet hatte, nach Nordafrika. Dort versprach ein König, ihr so viel Land zu schenken, wie sie mit einer Ochsenhaut umspannen könne. Dido zerschnitt die Haut in einen schmalen, langen Riemen und umspannte damit ein Gebiet, auf dem sie eine Burg errichten ließ. Aus dieser entwickelte sich Karthago.
In welcher Form musste Dido den Riemen aufspannen, damit er eine möglichst große Fläche umfasste?

A. Größtmögliche Rechtecksfläche

Um Rohstoffe zu sparen, ist man daran interessiert, dass bei der Herstellung eines Produkts möglichst wenig Abfall entsteht, bzw. eine vorhandene Materialmenge möglichst gut ausgenutzt wird. Bei solchen Problemen muss man einen kleinsten bzw. einen größten Wert, d. h. einen *Extremwert*, bestimmen.

Beispiel: Nehmen wir an, Dido gelang es, einen Riemen der Länge 800 m herzustellen. Nehmen wir ferner an, dass sie zum Anlegen einer Burg ein Rechteck am geeignetsten hielt. Wie musste sie den Riemen aufspannen, damit sich das Rechteck mit der größten Fläche ergab?

Lösung: x Meter sei die Länge des Rechtecks,
y Meter die Breite und
A Quadratmeter der Flächeninhalt.



Im Term für den Flächeninhalt
$A = xy$
treten die beiden Variablen x und y auf.

Da der Umfang des Rechtecks 800 m sein soll, können wir entweder x oder y eliminieren:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 800 \\ 2y &= 800 - 2x \\ y &= 400 - x \end{aligned}$$

Also:

$A = xy = x(400 - x) = -x^2 + 400x$

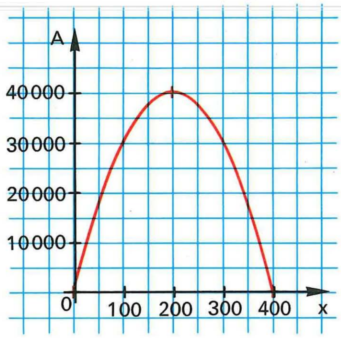
Die kleinste Rechteckslänge ist 0, die größte der halbe Umfang 400 m, die Definitionsmenge D der Flächenfunktion $x \mapsto A$ folglich $D = [0; 400]$. Sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 400$ erhält man $A = 0$.

Der Graph der Flächenfunktion $x \mapsto A$ ist eine nach unten geöffnete Parabel.

Den größten Wert für A liefert der Parabelscheitel. Um seine Koordinaten zu bestimmen, ergänzen wir quadratisch:

$$\begin{aligned} A &= -x^2 + 400x = \\ &= -(x^2 - 400x + 200^2 - 200^2) = \\ &= -(x - 200)^2 + 40000 \end{aligned}$$

Scheitel $S(200|40000)$



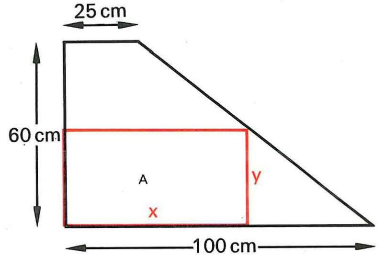
Antwort: Das größtmögliche Rechteck, das mit dem Riemen aufgespannt werden kann, ist 200 m lang und 200 m breit. Seine Fläche beträgt 40000 m^2.

Das größtmögliche Rechteck ist ein Quadrat. Würden wir mit einem anderen Wert für den Umfang die Aufgabe bearbeiten, so müssten wir beim Auflösen nach y den Umfang halbieren und beim quadratischen Ergänzen noch einmal. Der Scheitel ergibt sich also stets, wenn x ein Viertel des Umfangs ist:

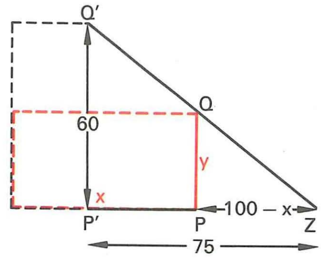
Von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

B. Der Strahlensatz als Lösungshilfe

Beispiel: Aus einer trapezförmigen Marmorplatte soll, wie rechts dargestellt, das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt herausgesägt werden. Wie sind die Abmessungen zu wählen?



Lösung: x cm sei die Länge des Rechtecks, y cm die Breite und A cm^2 der Flächeninhalt.



$A = xy$

Der Strahlensatz liefert uns eine Gleichung zum Eliminieren von y:

„Verhältnis der Parallelstrecken = Verhältnis ihrer Entfernungen vom Kreuzungspunkt"

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{ZP}}{\overline{ZP'}}$$

$$\frac{y}{60} = \frac{100-x}{75} \qquad | \cdot 60$$

$$y = \frac{60\,(100-x)}{75} = \frac{4}{5}\,(100-x)$$

Also:

$$A = xy = x \cdot \frac{4}{5}\,(100-x) =$$

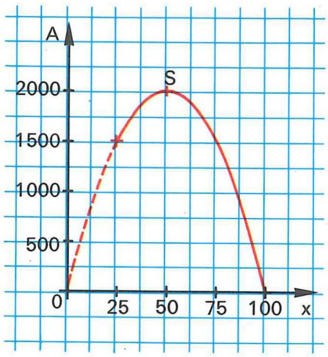
$$= \frac{4}{5}\,(-x^2 + 100x) =$$

$$= -\frac{4}{5}\,(x^2 - 100x + 50^2 - 50^2) =$$

$$= -\frac{4}{5}\,(x-50)^2 + \frac{4}{5} \cdot 2500 =$$

$$= -\frac{4}{5}\,(x-50)^2 + 2000$$

Scheitel S (50 | 2000)



Aus der Abbildung der Marmorplatte entnehmen wir, dass die kleinste Länge des Rechtecks 25 cm und die größte 100 cm ist. Die Flächenfunktion $x \mapsto A$ besitzt somit die Definitionsmenge $D = [25;\ 100]$.

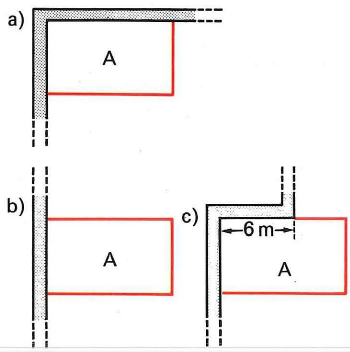
Diese enthält die x-Koordinate des Scheitels der nach unten geöffneten Parabel. Der Scheitel liefert also die größte Rechtecksfläche:

$$x = 50; \quad y = \frac{4}{5}\,(100-50) = 40; \quad A = 2000$$

Antwort: Die größte rechteckige Platte, die aus der Marmorplatte herausgeschnitten werden kann, ist 50 cm lang und 40 cm breit. Ihr Flächeninhalt beträgt 2000 cm^2.

AUFGABEN

1. *Weideflächen*



Eine rechteckige Weidefläche soll angelegt werden.

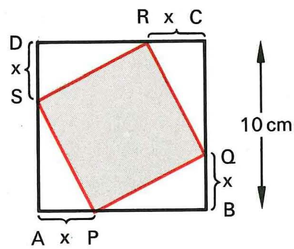
a) Sie wird von zwei Mauern und einem 30 m langen Zaun begrenzt (Figur a).

b) Sie wird von einer Mauer und einem 30 m langen Zaun begrenzt (Figur b).

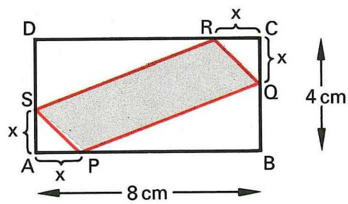
c) Sie wird von zwei Mauern und einem 30 m langen Zaun begrenzt (Figur c).

Wie muss man den Zaun anbringen, damit sich jeweils das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt ergibt?

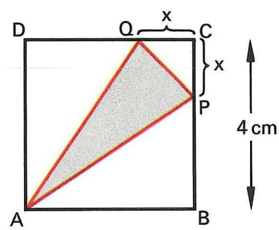
2. *Einbeschreibaufgaben*



a) Ein Quadrat ABCD hat die Seitenlänge 10 cm. Trägt man von jedem Eckpunkt auf der folgenden Seite x cm ab, so erhält man die vier Punkte P, Q, R und S. Für welchen x-Wert hat das Quadrat PQRS den kleinsten Flächeninhalt? Wie groß ist dieser?

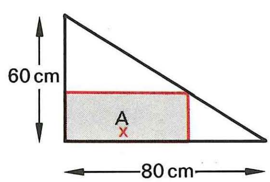


b) Ein Rechteck ABCD ist 8 cm lang und 4 cm breit. Trägt man von den Eckpunkten A und C auf den beiden anliegenden Seiten jeweils x cm ab, erhält man die vier Punkte P, Q, R und S. Für welchen x-Wert hat das Parallelogramm PQRS den größten Flächeninhalt. Wie groß ist dieser?



c) Ein Quadrat ABCD hat die Seitenlänge 4 cm. Trägt man von der Ecke C auf beiden anliegenden Seiten jeweils x cm ab, so erhält man die Punkte P und Q. Für welchen x-Wert hat das Dreieck APQ den größten Flächeninhalt? Wie groß ist dieser?

3. *Marmorplatte*



Aus einer dreieckförmigen Marmorplatte soll, wie rechts dargestellt, eine rechteckige der Länge x cm herausgesägt werden.

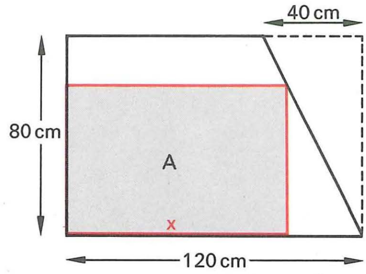
a) Bestimme den Term, der den Flächeninhalt A cm^2 in Abhängigkeit von x beschreibt!

b) Gib die Definitionsmenge D der Flächenfunktion $x \mapsto A$ an! Ermittle die Scheitelkoordinaten der zugehörigen Parabel!

c) Zeichne den Graphen der Flächenfunktion $x \mapsto A$!

d) Wie muss man Länge und Breite wählen, damit man die rechteckige Platte mit dem größten Flächeninhalt bekommt? Wie viel Prozent der ursprünglichen Fläche entfallen auf die größte Rechtecksfläche?

4. *Stark beschädigte Tischplatte*



Aus dem trapezförmigen, unbeschädigten Teil einer wertvollen Tischplatte soll eine rechteckige herausgesägt werden.

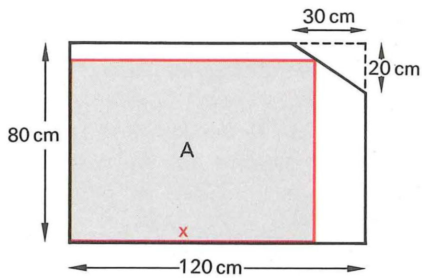
a) Entnimm der Abbildung die Definitionsmenge der Flächenfunktion $x \mapsto A$!

b) Bestimme den Term, der den Flächeninhalt A cm^2 des Rechtecks in Abhängigkeit von x beschreibt!

c) Ermittle die Scheitelkoordinaten der Parabel! Zeichne den Graphen der Flächenfunktion $x \mapsto A$!

d) Wie muss man Länge und Breite wählen, damit das Rechteck den größten Flächeninhalt bekommt? Wie groß ist dieser?

5. *Beschädigte Tischplatte*



Aus dem unbeschädigten Teil einer wertvollen Tischplatte soll eine rechteckige herausgesägt werden.

a) Bearbeite die Aufgaben 4 a) bis d) für die rechts dargestellte Tischplatte!

b) Wie viele Quadratzentimeter der Tischplatte verschenkt man, wenn man anstatt des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt durch nur einen Schnitt bei $x = 90$ das linke Rechteck absägt?