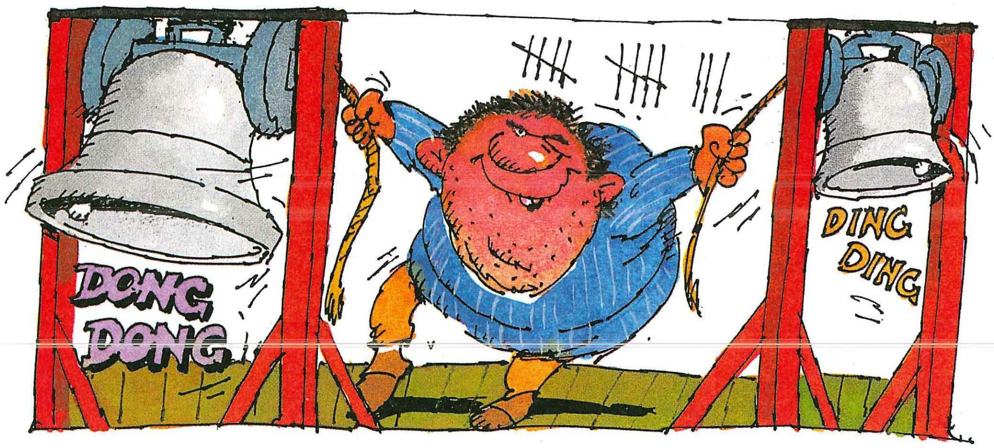
§ 15 Quadratische Ungleichungen



Ein akustisches Wettrennen

Die kleine Glocke einer Turmuhr schlägt mit hohem Ton jede Viertelstunde, erst einmal, dann zweimal, dreimal und zur vollen Stunde viermal. Die große Glocke mit dem tiefen Ton zählt die vollen Stunden, von der ersten bis zur zwölften. Jeweils um Mitternacht beginnt ein Wettlauf zwischen beiden: Zunächst bleibt die große mit ihren wenigen Schlägen aussichtslos zurück, doch im Laufe des Tages werden ihre Schläge immer zahlreicher.

a) Wie viele Schläge macht jede der beiden Glocken bis einschließlich zur n-ten Stunde[1] des Tages?

b) Kann die große Glocke mit der Anzahl ihrer Schläge die kleine überholen?

A. Erstes Lösungsverfahren (anschaulich)

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind die Nullstellen der Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Die Nullstellen der Funktion sind jene Punkte ihres Graphen, die *auf* der x-Achse liegen. Damit stellen sich aber auch folgende Fragen:

Welche Punkte des Graphen liegen
- oberhalb der x-Achse, welche liegen
- unterhalb der x-Achse?

Oberhalb der x-Achse liegen die Punkte des Graphen, deren Funktionswerte positiv sind. Um diese Punkte zu bestimmen, muss man die *quadratische Ungleichung*

$$ax^2 + bx + c > 0$$

lösen.

[1] Beachte: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Beispiel: $x^2 - 2x - 3 > 0$

Der Graph der Funktion $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel. Um die Punkte zu finden, die oberhalb der x-Achse liegen, genügt es, die Lage der Nullstellen zu ermitteln. Nach dem Satz von Vieta sind diese $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

Die quadratische Ungleichung

$x^2 - 2x - 3 > 0$

besitzt also die Lösungsmenge

$L =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$.

Die Zeichnung liefert auch die Lösungsmengen der Ungleichungen

$x^2 - 2x - 3 < 0$,

nämlich

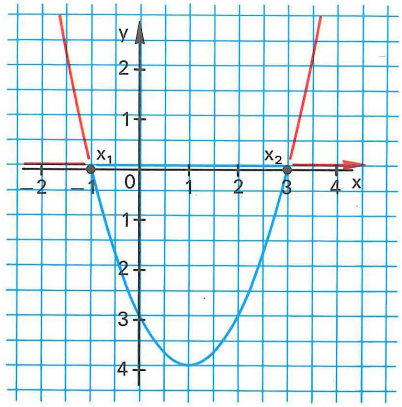
$L =]-1; 3[$,

und

$x^2 - 2x - 3 \leqq 0$,

nämlich

$L = [-1; 3]$.



B. Zweites Lösungsverfahren (formal)

Eine formale Lösung der Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$ ist möglich, wenn es gelingt, den Term $ax^2 + bx + c$ in Faktoren zu zerlegen.

Beispiel: $x^2 - 2x - 3 > 0$

Nach dem Satz von Vieta sind die Nullstellen des Terms $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Nach dem Zerlegungssatz folgt:

$(x+1)(x-3) > 0$

Das Produkt $(x+1)(x-3)$ ist genau dann positiv, wenn

1. beide Faktoren positiv oder	2. beide Faktoren negativ sind:
$x+1>0$ und $x-3>0$	$x+1<0$ und $x-3<0$
$x>-1$ und $x>3$	$x<-1$ und $x<3$
$x>3$	$x<-1$

Jene Zahlen, die $x > 3$ oder $x < -1$ erfüllen, gehören also zur Lösungsmenge: $L =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$.

Besitzt die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ keine reellen Lösungen, so lässt sich der Term $ax^2 + bx + c$ der Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$ nicht in Faktoren zerlegen. Die durch $y = ax^2 + bx + c$ gegebene Parabel liegt entweder

– vollständig oberhalb der x-Achse; dann erfüllen alle reellen Zahlen die Ungleichung $ax^2 + x + c > 0$; oder

– vollständig unterhalb der x-Achse; dann erfüllt keine reelle Zahl die Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$.

Welcher dieser beiden Fälle vorliegt, hängt davon ab, ob $a > 0$ oder $a < 0$ ist.

AUFGABEN

Nr. 1 und 2: Bestimme die Lösungsmenge mit dem anschaulichen und mit dem formalen Lösungsverfahren!

1. a) $x^2 - 6x + 8 > 0$ b) $x^2 + 2x < 3$ c) $x^2 + 1{,}5x + 2{,}25 \leqq 0$
d) $1 + 4x - x^2 < 0$ e) $x^2 < 3x$ f) $x^2 - 1 > 2 - 1{,}3x$

2. a) $x^2 - 2x + 2 > 0$ b) $x^2 - 3x + 6 \leqq 0$ c) $x^2 > 4x - 4$
d) $-1 < x^2 - 6x + 7 < 2$ e) $-2 \leqq 2x^2 - 8x + 4 \leqq 4$ f) $1 \leqq 8x - 7 - 2x^2 < 4$

3. Bestimme die Lösungsmengen folgender Ungleichungen mit dem formalen Lösungsverfahren!
a) $2x^2 - x - 10 < 0$ b) $11x - 8 > 4x^2$ c) $20x^2 + 49x + 9 > 0$
d) $24x^2 - 35x + 20 > -40$ e) $9x^2 + 24x + 16 > 0$ f) $25x^2 + 256 \leqq 160x$

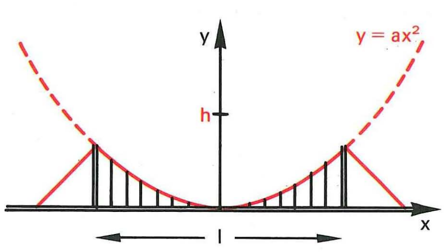
4. Folgende Ungleichungen kann man lösen, indem man mit dem Quadrat des jeweiligen Nenners multipliziert. Bestimme die Lösungsmenge!
a) $\dfrac{x-1}{x+4} > 0$ b) $\dfrac{x-9}{2-x} \geqq 0$ c) $\dfrac{2x+11}{5x+2} < 0$
d) $\dfrac{5x+2}{2x-3} \leqq 1$ e) $\dfrac{4x-3}{x-3} > 4$ f) $x > 2 - \dfrac{1}{x}$

5. Bestimme die Lösungsmenge!
a) $|x^2 - 2x - 2| \leqq 0$ b) $|x^2 - 2x - 15| > 1$ c) $\left|\dfrac{x+2}{x} - 1\right| < \dfrac{1}{10}$
d) $2 < \dfrac{x+1}{x-1} < 3$ e) $\left|\dfrac{3x}{x-2}\right| > 2$ f) $|3x - 1| > |2 - x|$

6. Bestimme die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter t!
a) $x^2 + 2tx - 3t = 0$ b) $x^2 + tx + t + 1{,}25 = 0$ c) $x^2 - 2tx - 4t - 3 = 0$

7. *Hängebrücke*

Die Tragseile von Hängebrücken beschreiben Kettenlinien oder Parabelbögen. Liegt bei einem parabelförmigen Bogen der Scheitel im Ursprung des Koordinatensystems, so lautet seine Gleichung $y = ax^2$.
Die Spannweite der Brücke sei l, die größtmögliche Höhe der Pfeiler h. Stelle die Ungleichung für a auf!



8. Ein Bauer möchte mit einem 200 m langen Elektrozaun eine rechteckige Weide abgrenzen, deren Fläche mindestens $2400\ m^2$ betragen soll. Bestimme den Mindest- und den Höchstwert für die Länge des abzusteckenden Rechtecks!