2. Beispiel: $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x-y)^2} =$

$$= |x - y| = \begin{cases} x - y, \text{ wenn } x - y \geqq 0, \text{ d.h. } x \geqq y \text{ ist} \\ -x + y, \text{ wenn } x - y < 0, \text{ d.h. } x < y \text{ ist} \end{cases}$$

AUFGABEN

1. *Stellenregel*

a) Wie viele Stellen besitzt die Wurzel aus einer $(2n-1)$- oder $2n$-stelligen Quadratzahl?

b) Wir teilen die Quadratzahlen 900, 8100, 90000, 810000 und 0,0009 vom Komma aus nach links und rechts in *Zweierpäckchen* auf:

9 00 81 00 9 00 00 81 00 00 0,00 09

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Zweierpäckchen und der Anzahl der Stellen der Wurzel? Bestimme die Wurzeln und schreibe unter jedes Päckchen die zugehörige Ziffer der Wurzel!

c) Wir interessieren uns für die Wurzel $\sqrt{4761}$. Zerlege die Quadratzahl 4 761 in Zweierpäckchen. Welche Zehnerziffer besitzt aufgrund des zugehörigen Päckchens die Wurzel? Welche beiden Einerziffern kommen aufgrund der Einerziffern des Radikanden für die Wurzel in Frage? Welche Ziffer ist die richtige? Gib $\sqrt{4761}$ an! Überprüfe dein Ergebnis mit dem Taschenrechner!

2. Die Radikanden der folgenden Wurzeln sind Quadrate rationaler Zahlen. Ermittle die Wurzelwerte ohne Verwendung des Taschenrechners!

a) $\sqrt{64}$	b) $\sqrt{169}$	c) $\sqrt{289}$	d) $\sqrt{529}$
e) $\sqrt{10000}$	f) $\sqrt{10^6}$	g) $\sqrt{0{,}09}$	h) $\sqrt{0{,}0001}$
i) $\sqrt{4900}$	k) $\sqrt{19600}$	l) $\sqrt{961}$	m) $\sqrt{3481}$
n) $\sqrt{4489}$	o) $\sqrt{53{,}29}$	p) $\sqrt{67{,}24}$	q) $\sqrt{0{,}2209}$
r) $\sqrt{0{,}0225}$	s) $\sqrt{1444}$	t) $\sqrt{0{,}0144}$	u) $\sqrt{15625}$

3. Bestimme, falls es eine rationale Wurzel gibt, deren Wert!

a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$	b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$	c) $\sqrt{\frac{100}{81}}$	d) $\sqrt{\frac{18}{50}}$
e) $\sqrt{\frac{2}{7}}$	f) $\sqrt{\frac{3}{4}}$	g) $\sqrt{\frac{32}{72}}$	h) $\sqrt{\frac{75}{147}}$
i) $\sqrt{\frac{23}{92}}$	k) $\sqrt{\frac{28}{63}}$	l) $\sqrt{\frac{32}{48}}$	m) $\sqrt{\frac{64}{256}}$

4. Wie lang ist die Seite eines Quadrats mit dem Flächeninhalt

a) $400\ \text{cm}^2$ b) $3{,}24\ \text{m}^2$ c) $0{,}0441\ \text{mm}^2$ d) $62500\ \text{m}^2$?

5. Wie lang sind Basis und Basishöhe eines geichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit dem Flächeninhalt

a) $25\ \text{cm}^2$ b) $1\ \text{cm}^2$ c) $0{,}36\ \text{m}^2$?

6. a) $(\sqrt{36})^2$ b) $(\sqrt{256})^2$ c) $\sqrt{7^2}$ d) $\sqrt{31^2}$
e) $(\sqrt{p})^2$ (p Quadratzahl) f) $\sqrt{q^2}$ $(q \in \mathbb{Q}^+)$

7. a) $\sqrt{(-6)^2}$ b) $\sqrt{(-13)^2}$ c) $\sqrt{(-2{,}5)^2}$ d) $\sqrt{(-19{,}5)^2}$
e) $\sqrt{r^2}$ $(r \in \mathbb{Q})$ f) $\sqrt{(-s)^2}$ $(s \in \mathbb{Q})$

8. Schreibe als Quadratwurzel:
a) 3 b) 9 c) -3 d) 0,9
e) $-\frac{1}{3}$ f) $|u|$ g) v^2 h) a^2b^4

Nr. 9 und 10: Radiziere!

9. a) $\sqrt{9a^2}$ b) $\sqrt{16a^2b^2}$ c) $\sqrt{0{,}25a^4b^2}$ d) $\sqrt{0{,}04x^8y^4}$
e) $2a^2 - \sqrt{4a^4}$ f) $\sqrt{x^2} - x$ g) $6z + \sqrt{36z^2}$
h) $u - \sqrt{4u^2}$ i) $2m^2 - \sqrt{(3m^2)^2}$ k) $9b^2 - \sqrt{(-9b^2)^2}$

10. a) $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$ b) $\sqrt{z^2 + 49 - 14z}$ c) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$
d) $\sqrt{1 + 6x + 9x^2}$ e) $\sqrt{x^4 + 1 + 2x^2}$ f) $\sqrt{4a^2 + 4ab + b^2}$
g) $\sqrt{6{,}25p^2 - 2pq + 0{,}16q^2}$ h) $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4} + a}$ i) $\sqrt{16r^2 - 28rs + 49s^2}$

11. Ergänze den Radikanden zu einem vollständigen Quadrat! Radiziere! Führe, falls notwendig, eine Fallunterscheidung durch!
a) $\sqrt{x^2 - 12x + \ldots}$ b) $\sqrt{y^2 + 6y + \ldots}$ c) $\sqrt{z^2 - 5z + \ldots}$
d) $\sqrt{x^2 + 81 - \ldots}$ e) $\sqrt{a^4 + 1 + \ldots}$ f) $\sqrt{4u^2 - 4uv + \ldots}$
g) $\sqrt{1 + 4a^2 + \ldots}$ h) $\sqrt{a^2 - ab + \ldots}$ i) $\sqrt{9b^2 + b + \ldots}$
k) $\sqrt{m^4 + m^2n^2 + \ldots}$ l) $\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \ldots}$ m) $\sqrt{4x^2 + \frac{1}{2}x + \ldots}$

12. Es sei a eine negative rationale Zahl. Vereinfache folgende Terme!
a) $a + \sqrt{a^2 - 2a + 1}$ b) $a^2 - \sqrt{a^4 + 9 + 6a^2}$
c) $\sqrt{4a^2 - 4a + 1} - \sqrt{4a^2}$ d) $\sqrt{0{,}25a^2} - \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} - a}$
e) $\sqrt{(-3a^2)^2} - \sqrt{81a^4 + 1 + 18a^2}$ f) $a\sqrt{0{,}64a^2} - \sqrt{0{,}64a^4 + 8a^2 + 25}$

Tüftelecke

Herr K. behauptet, beweisen zu können, dass 3 = 4 ist.

Beweis:
$$9 - 21 = 16 - 28$$
$$9 - 21 + \frac{49}{4} = 16 - 28 + \frac{49}{4}$$
$$\left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2$$
$$3 - \frac{7}{2} = 4 - \frac{7}{2}$$
$$3 = 4$$

Wo steckt der Fehler?

2. Welche rationale Zahl liegt jeweils in allen Intervallen der Intervallschachtelung?

a) [0,6; 0,7]
[0,66; 0,67]
[0,666; 0,667]
[0,6666; 0,6667]
⋮

b) [1,9; 2,1]
[1,99; 2,01]
[1,999; 2,001]
[1,9999; 2,0001]
⋮

c) [1,8; 2]
[1,98; 2]
[1,998; 2]
[1,9998; 2]
⋮

3. Gib die ersten fünf Intervalle einer Intervallschachtelung an, in der die folgende rationale Zahl liegt:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{4}$

4. Bilden die folgenden Intervalle den Beginn einer Intervallschachtelung, wenn man sinngemäß fortsetzt? Begründung!

a) [0,4; 0,7]
[0,49; 0,61]
[0,499; 0,601]
[0,4999; 0,6001]
⋮

b) [2; 3]
[2,31; 2,32]
[2,3131; 2,3132]
[2,313131; 2,313132]
⋮

c) [4,4; 4,5]
[4,54; 4,55]
[4,554; 4,555]
[4,5554; 4,5555]
⋮

5. Untersuche, ob die folgenden Zahlen rational oder irrational sind:
(Hinweis: zu e), f), g): Nimm dazu an, die Zahl sei rational und führe diese Annahme zu einem Widerspruch.)

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{4}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$
e) $1 + \sqrt{2}$ f) $3 \cdot \sqrt{2}$ g) $1 : \sqrt{2}$ h) $(\sqrt{2})^2$

6. Gib die ersten fünf Intervalle einer Intervallschachtelung für folgende Wurzeln an! Entnimm dieser jeweils den Anfang der Dezimaldarstellung!

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{4}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$

7. *Bruch- und Dezimaldarstellung rationaler Zahlen*

a) Zeige, indem du die Division durchführst:

$\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$; $\frac{1}{99} = 0,\overline{01}$; $\frac{1}{999} = 0,\overline{001}$; $\frac{1}{9999} = 0,\overline{0001}$

b) Wandle in Dezimalbrüche um:

$\frac{3}{4}$; $\frac{17}{50}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{13}{99}$; $\frac{5}{33}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{23}{999}$; $\frac{52}{111}$

c) Schreibe mit Bruchstrichen:

$0,2$; $0,55$; $0,\overline{1}$; $0,\overline{5}$; $0,\overline{03}$; $0,\overline{27}$; $0,\overline{027}$; $0,\overline{369}$

6. Die Zahl $1 + \sqrt{2}$ ist irrational.

a) Untersuche, ob $1 + \sqrt{2}$ Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl ist!

b) Ist jede irrationale Zahl Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl? Begründung!

7. a) Ist $\sqrt{\sqrt{2}}$ Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl?

b) Gib eine Intervallschachtelung für $\sqrt{\sqrt{2}}$ an!

c) Ist $\sqrt{\sqrt{2}}$ eine reelle Zahl? Begründung!

d) Sind in $\mathbb{R}$ auch die Quadratwurzeln positiver irrationaler Zahlen enthalten? Begründung!

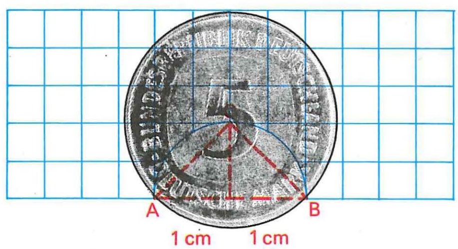
Ergänzungen und Ausblicke

Zur Geschichte der reellen Zahlen

Im 5. Jh. v. Chr. entdeckten *Pythagoras* und seine Schüler, dass sich das Längenverhältnis aus Diagonale und Seite eines Quadrats nicht durch ein Verhältnis ganzer Zahlen ausdrücken lässt. Sie nannten solche Verhältnisse „unausdrückbar" im Gegensatz zu den „ausdrückbaren". Ins Lateinische wurden diese Bezeichnungen mit „irrational" und „rational" übersetzt. Die Entdeckung „unausdrückbarer" Längenverhältnisse erregte großes Aufsehen, da sie die Harmonie zwischen Geometrie und Arithmetik zerstörte. *Eudoxos von Knidos* (408–355 v. Chr.) entwickelte ein Rechnen mit solchen Verhältnissen, das einer Theorie der Irrationalzahlen nahe kommt. Erst zu Beginn der Neuzeit haben sich die irrationalen Zahlen durchgesetzt: *Michael Stifel* (1487–1567) und *Simon Stevin* (1548–1620) versuchten sie zu definieren. Aber erst *Richard Dedekind* (1831–1916) und *Georg Cantor* (1845–1918) gelang es, befriedigende Theorien der reellen Zahlen zu entwickeln.

Tüftelecke

Der Elefant und das Nadelöhr



Schneide aus einem Blatt Papier ein kreisförmiges Loch vom Durchmesser 2,0 cm heraus. Ein Fünfmarkstück hat einen Durchmesser von 2,8 cm. Versuche ein Fünfmarkstück durch das Loch zu schieben!

Gelingt es nicht, lege das Papier so zusammen, dass das Loch zu einem Halbkreis an der Faltkante wird (siehe Abbildung). Wie lang sind $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$? Vergleiche mit dem Durchmesser des Fünfmarkstücks! Wie kann man folglich das Geldstück durch das Loch gleiten lassen?

2. *Teilweises Radizieren*
Spaltet man im Radikanden Quadrat-Faktoren ab, lassen sich diese radizieren. So entstehen einfachere Radikanden.

Beispiele: a) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a}$

3. *Addieren und Subtrahieren von Quadratwurzeln*
Summen und Differenzen von Quadratwurzeln lassen sich nur zusammenfassen, wenn man mithilfe des Distributivgesetzes Wurzeln mit *gleichen* Radikanden ausklammern kann.

Beispiele: a) $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (3+7) \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

b) $\sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Wurzeln mit gleichen Radikanden werden also addiert, indem man die Koeffizienten addiert und die Wurzeln beibehält.

4. *Rationalmachen des Nenners*
Ohne einen Taschenrechner erfordert die Division durch einen mehrstelligen Näherungswert für eine irrationale Quadratwurzel einen hohen Rechenaufwand. Deshalb erweitert man Brüche so, dass im Nenner eine rationale Zahl entsteht.

1. Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Tritt im Nenner eine Summe oder Differenz mit Wurzeln auf, hilft die „Plusminusformel" weiter:

2. Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{7-2} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$

Wir fassen die Regeln zum Rechnen mit Quadratwurzeln zusammen:

Produkte und *Quotienten* dürfen *gliedweise radiziert* werden.
Produkte und *Quotienten* von Wurzeln können zu *einer Wurzel zusammengefasst* werden.
Summen und *Differenzen* dürfen *nicht gliedweise radiziert* werden.
Eine *Summe von Wurzeln* kann nur *zusammengefasst* werden, wenn der *gleiche Radikand* vorliegt: Dann werden die Koeffizienten addiert und die Wurzel beibehalten.

AUFGABEN

Die im Folgenden auftretenden Variablen vertreten positive reelle Zahlen. Verwende den Taschenrechner nur dann, wenn es ausdrücklich gefordert wird!

1. Fasse unter einer Wurzel zusammen und radiziere!

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$ b) $3\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{16{,}9} \cdot \sqrt{10}$ d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7{,}2}$

e) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$ g) $\frac{\sqrt{1{,}25}\cdot\sqrt{40}}{\sqrt{2}}$ h) $\sqrt{\frac{76}{135}}:\sqrt{\frac{57}{45}}$

i) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$ k) $\sqrt{b}\cdot\sqrt{b^3}$ l) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{xy^2}$ m) $\sqrt{a^3}:\sqrt{a}$

n) $\sqrt{2ac}\cdot\sqrt{\frac{8a}{c}}$ o) $\sqrt{\frac{pq}{3r}}:\sqrt{\frac{qr}{27p}}$ p) $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}$ q) $\sqrt{\frac{6{,}48u}{0{,}09vw}}:\sqrt{\frac{2w}{uv}}$

2. Radiziere!

a) $\sqrt{25\cdot 49}$ b) $\sqrt{9\cdot 169}$ c) $\sqrt{81\cdot 121}$ d) $\sqrt{64\cdot 225}$

e) $\sqrt{0{,}01\cdot 324}$ f) $\sqrt{0{,}0036\cdot 1{,}44}$ g) $\sqrt{0{,}0009\cdot 0{,}0625}$ h) $\sqrt{0{,}0049\cdot 0{,}0729}$

i) $\sqrt{9\cdot 10^2}$ k) $\sqrt{64\cdot 10^4}$ l) $\sqrt{1{,}96\cdot 10^6}$ m) $\sqrt{4{,}41\cdot 10^8}$

n) $\sqrt{25e^2f^2}$ o) $\sqrt{u^2v^4w^6}$ p) $\sqrt{\frac{x^4y^2}{484z^2}}$ q) $\sqrt{\frac{289a^2b^4}{529x^6y^8}}$

3. Radiziere!

a) $\sqrt{7\cdot 63}$ b) $\sqrt{6\cdot 10\cdot 15}$ c) $\sqrt{0{,}9\cdot 810}$ d) $\sqrt{2{,}5\cdot 10^3}$

e) $\sqrt{4{,}9\cdot 10^5}$ f) $\sqrt{12{,}1\cdot 10^9}$ g) $\sqrt{28{,}9\cdot 10^{11}}$ h) $\sqrt{3\cdot 10{,}8\cdot 10^5}$

i) $\sqrt{\frac{18}{32}}$ k) $\sqrt{\frac{6{,}4}{36{,}1}}$ l) $\sqrt{\frac{57{,}6\cdot 27}{250\cdot 48}}$ m) $\sqrt{\frac{18\cdot 98}{7{,}5\cdot 19{,}2}}$

4. Radiziere teilweise!

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{48}$ c) $2\sqrt{63}$ d) $3\sqrt{162}$

e) $5\sqrt{192}$ f) $3\sqrt{288}$ g) $2\sqrt{507}$ h) $5\sqrt{980}$

i) $\sqrt{ab^2}$ k) $\sqrt{25r^2s}$ l) $\sqrt{81a^4b^2c}$ m) $\sqrt{x^3}$

n) $\sqrt{27p^3q^2r}$ o) $\sqrt{x^2+y^2}$ p) $\sqrt{a^2x+a^2y}$ q) $\sqrt{z^3+z^2}$

r) $\sqrt{\frac{u^3v}{w^2}}$ s) $\sqrt{\frac{0{,}04u^3}{9v^5}}$ t) $\sqrt{\frac{a^3+a^2}{8b^2}}$ u) $\sqrt{\frac{54z^5+27z^4}{0{,}03y^2}}$

5. Ziehe unter das Wurzelzeichen!

a) $2\sqrt{c}$ b) $\frac{1}{5}\sqrt{d}$ c) $x\sqrt{y}$ d) $3r\sqrt{r}$

e) $-3r\sqrt{r}$ f) $y^2\sqrt{yz}$ g) $a\sqrt{b+c}$ h) $2u\sqrt{u+3v}$

i) $pq\sqrt{\frac{p}{q}}$ k) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$ l) $\frac{xy}{4z}\sqrt{\frac{16z^3}{x^2y}}$ m) $3a\sqrt{\frac{3a+1}{27a^3+9a^2}}$

6. Berechne:

a) $\sqrt{9}+\sqrt{16}-\sqrt{9+16}$ b) $\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}-\sqrt{9\cdot 16}$

c) $\sqrt{169}-\sqrt{25}-\sqrt{169-25}$ d) $\frac{\sqrt{169}:\sqrt{25}}{\sqrt{169:25}}$

e) $(\sqrt{144}\cdot\sqrt{25}-\sqrt{144\cdot 25})^2$ f) $(\sqrt{144}+\sqrt{25}-\sqrt{144+25})^2$

g) $\sqrt{1\frac{9}{16}}-\sqrt{1+\frac{9}{16}}+\sqrt{1\cdot\frac{9}{16}}$ h) $\sqrt{9\cdot\frac{25}{16}}-\sqrt{10\frac{9}{16}}+\sqrt{9+\frac{25}{16}}$

Nr. 7 bis 9: Fasse so weit wie möglich zusammen!

7. a) $5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{7}+\sqrt{7}$ c) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
d) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e) $7\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ f) $\sqrt{5}-4\sqrt{7}+4\sqrt{5}+\sqrt{7}$
g) $2\sqrt{5}-6\sqrt{2}+3\sqrt{5}+\sqrt{2}$ h) $5\sqrt{a}-4\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$
i) $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}$ k) $2\sqrt{a}+\sqrt{b}-3\sqrt{a+b}-3\sqrt{a}+3\sqrt{b}$

8. a) $\sqrt{45}+\sqrt{20}+\sqrt{5}$ b) $\sqrt{72}-\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{2}$
c) $\sqrt{2}-\sqrt{4}+\sqrt{8}-\sqrt{16}+\sqrt{32}-\sqrt{64}$ d) $\sqrt{3}-\sqrt{9}+\sqrt{27}-\sqrt{81}+\sqrt{243}-\sqrt{729}$
e) $\sqrt{75}+2\sqrt{3}-2\sqrt{27}$ f) $\sqrt{242}-\sqrt{98}+4\sqrt{8}-\frac{2}{5}\sqrt{50}-\sqrt{200}$
g) $2\sqrt{45}-4\sqrt{63}+\sqrt{245}+\sqrt{28}$ h) $\frac{7}{3}\sqrt{999}+\frac{2}{5}\sqrt{275}+\frac{3}{4}\sqrt{176}$

9. a) $a+\sqrt{a^2}$ b) $a+3\sqrt{a^2}$ c) $a\sqrt{a}+\sqrt{a^3}$
d) $a+\sqrt{a^3}$ e) $\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}$ f) $b\sqrt{2}-2\sqrt{b}+\sqrt{2b^2}$
g) $a\sqrt{b}+\sqrt{a^2b}+b\sqrt{a}+\sqrt{ab^2}$ h) $a\sqrt{a}-\sqrt{ab^2}+\sqrt{4a}+\sqrt{a^3}$
i) $x\sqrt{y}-\sqrt{x^2y^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}$ k) $2\sqrt{m^3}-3m\sqrt{m^2}+4m\sqrt{m}+5m^2$

10. Multipliziere und radiziere so weit wie möglich:
a) $(1+\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}$ b) $(\sqrt{27}-\sqrt{12})\cdot\sqrt{3}$ c) $(\sqrt{15}+\sqrt{20})\cdot\sqrt{5}$
d) $(\sqrt{150}+2\sqrt{15}-2{,}5\sqrt{24})\cdot\sqrt{6}$ e) $(7\sqrt{2}-5\sqrt{6}-3\sqrt{8}+2\sqrt{24})\cdot 3\sqrt{2}$
f) $(4-\sqrt{5})(12+3\sqrt{5})$ g) $(\sqrt{6}-\sqrt{12})(\sqrt{3}+\sqrt{6})$
h) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ i) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$
k) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$ l) $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$
m) $(1-\sqrt{2})^2$ n) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$
o) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ p) $(\sqrt{5}-1)(6+\sqrt{180})$

11. a) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})-(\sqrt{11}-\sqrt{7})^2$
c) $(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})^2-(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2$ d) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{12}-\sqrt{8})$
e) $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ f) $(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-3\sqrt{3})-(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$
g) $(\sqrt{12}-3\sqrt{27}+5\sqrt{3})^2$ h) $(2\sqrt{8}-3\sqrt{18}-2\sqrt{50})^2$

12. Berechne zuerst ohne Taschenrechner den genauen Wert und dann mit Taschenrechner einen Näherungswert:
a) $(\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{7})-(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$
b) $(2-\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})^2$
c) $(\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}+2\sqrt{5})(2\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}+\sqrt{10})^2$
d) $(\sqrt{6}-\sqrt{10})^2-2(\sqrt{6}+\sqrt{10})(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$
e) $(3\sqrt{12}-2\sqrt{2}-\sqrt{27})^2-3(2-\sqrt{6})^2$

13. a) $(\sqrt{2x}+\sqrt{3x^3})\cdot\sqrt{6x}$ b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
c) $(2\sqrt{x}-5\sqrt{y})^2$ d) $(\sqrt{p}+\sqrt{q})(\sqrt{p}-\sqrt{q})$
e) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ f) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})$

14. Vereinfache so weit wie möglich! Welche Bedingungen müssen jeweils an die Variablen gestellt werden, damit die Wurzelterme definiert sind?
a) $(1+2\sqrt{a}+a)(1-2\sqrt{a}+a)-(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})$
b) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2$
c) $(1+\sqrt{x^2+1})(1-\sqrt{x^2+1})-(1-\sqrt{x})^2$
d) $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+\sqrt{2x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-\sqrt{2x})$

15. a) $\sqrt{8+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{8-\sqrt{15}}$ b) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{6+2\sqrt{5}}$
c) $\sqrt{6-\sqrt{12}}\cdot\sqrt{9+\sqrt{27}}$ d) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}$
e) $\sqrt{x+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{y}}$ f) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}$

16. Beweise durch Termumformung:
a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$ b) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$
c) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$ d) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
e) $\sqrt{15-4\sqrt{14}}=\sqrt{8}-\sqrt{7}$ f) $\sqrt{16-4\sqrt{15}}=\sqrt{10}-\sqrt{6}$

17. Mache den Nenner rational und vereinfache so weit wie möglich!
a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{10}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{3}{2\sqrt{7}}$ d) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$
e) $\frac{4}{\sqrt{8}}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ g) $\frac{2\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ h) $\frac{3}{7}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}$
i) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$ l) $5-\frac{1}{\sqrt{5}}$
m) $\frac{21}{\sqrt{7}}-5\sqrt{7}+\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{7}}$ n) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}}$

18. Vereinfache so weit wie möglich:
a) $\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(3+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ b) $\left(\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$
c) $\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right)^2$ d) $\left(\frac{\sqrt{27}-\sqrt{8}}{\sqrt{12}}-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

19. Mache den Nenner rational!
a) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{3}+1}$ c) $\frac{6}{2-\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{3\sqrt{7}+4\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ f) $\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{11}+4}$

g) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ h) $\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}$ i) $\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{5}}{\sqrt{15}-2\sqrt{5}}$

20. Berechne zuerst ohne Taschenrechner den genauen Wert und dann mit Taschenrechner einen Näherungswert!

a) $\frac{25-5\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{80}}{3+\sqrt{5}}-10\sqrt{\frac{1}{5}}$ b) $\frac{12+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-6\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}-1}$

c) $\frac{15-7\sqrt{6}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}+3}+3\sqrt{\frac{1}{6}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}-4}-\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

e) $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{12}}\right)$

21. Beseitige die Wurzeln im Nenner!

a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{y}{\sqrt{y}}$ c) $\sqrt{\frac{a}{b}}$

d) $\frac{r\sqrt{s}-s\sqrt{r}}{\sqrt{rs}}$ e) $\frac{a-1}{\sqrt{a}+1}$ f) $\frac{3-2\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}$

g) $\frac{a-b}{\sqrt{a-b}}$ h) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ i) $\frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$

k) $\frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ l) $\frac{4x-2\sqrt{xy}+y}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ m) $\frac{9a+6\sqrt{ab}+b}{\sqrt{b}+3\sqrt{a}}$

22. Vereinfache so weit wie möglich! Welche Bedingungen sind jeweils an die Variable zu stellen, damit die Terme definiert sind?

a) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{2}{x-1}$ b) $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-\frac{8\sqrt{x}}{x-4}$

c) $\frac{\sqrt{x-9}}{\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x-9}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{x-\sqrt{x}}$

1. Beispiel:

$$x^2 + 3x = 0 \qquad \Big| + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left|x + \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

$$x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \vee x + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$x = 0 \vee x = -3$$

$$L = \{-3; 0\}$$

Wesentlich einfacher und schneller findet man hier aber die Lösungen, wenn man den Term faktorisiert.

2. Beispiel:

$$x^2 + 3x = 0$$
$$x(x + 3) = 0$$
$$x = 0 \ \vee \ x + 3 = 0$$
$$x = 0 \ \vee \ x = -3$$
$$L = \{-3; 0\}$$

Nicht nur im Fall $c = 0$ kann man das aufwändige Lösungsverfahren durch quadratische Ergänzung umgehen. Lässt sich ein Linearfaktor ausklammern, kommt man schneller zum Ziel.

3. Beispiel:

$$(x - 3)^2 + 5(x - 3) = 0$$
$$(x - 3)(x - 3 + 5) = 0$$
$$x - 3 = 0 \vee x + 2 = 0$$
$$x = 3 \vee x = -2$$
$$L = \{-2; 3\}$$

AUFGABEN

1. a) $x^2 = 49$ b) $x^2 = \frac{4}{9}$ c) $x^2 = 5$
d) $x^2 = 11$ e) $x^2 = -9$ f) $x^2 = \sqrt{2}$
g) $x^2 = 0{,}9$ h) $x^2 = (-4)^2$ i) $x^2 = -(-5)^2$

2. a) $2x^2 = 1$ b) $3x^2 = 4$ c) $9x^2 = 0$
d) $50x^2 = 27$ e) $\sqrt{3}x^2 = 15$ f) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{18} = 0$
g) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{48} = 0$ h) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{27} = 0$ i) $\frac{\sqrt{3}}{12}x^2 - \frac{\sqrt{27}}{4} = 0$

3. Unter welcher Bedingung besitzt die allgemeine reinquadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ keine bzw. eine bzw. zwei Lösungen?

4. a) $(x - 5)^2 = 0$ b) $x^2 + 14x + 49 = 0$ c) $x^2 - 16x + 64 = 0$
d) $x^2 - 8x = -16$ e) $6x - x^2 = 9$ f) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$

5. a) $x^2 + 10x - 96 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3 = 0$ c) $x^2 - 2x - 3 = 0$
d) $x^2 + 16x + 63 = 0$ e) $y^2 - 12y - 288 = 0$ f) $x^2 - 28x + 196 = 0$

6. a) $x^2+3x-54=0$ b) $x^2+19x+78=0$ c) $-x^2+x+90=0$
d) $z^2-23z+90=0$ e) $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$ f) $x^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}x$

7. a) $x^2-2x-1=0$ b) $x^2+6x+7=0$ c) $x^2+8x+16=0$
d) $x^2=4x-1$ e) $16-6y=y^2$ f) $x+1=x^2$

8. a) $x^2+4x+5=0$ b) $x^2+4x-5=0$ c) $x^2-4x+5=0$
d) $x^2-4x-5=0$ e) $x^2-4x+4=0$ f) $x^2-4x-4=0$

9. a) $2x^2+2x-60=0$ b) $2x^2-6x+4=0$ c) $2x^2+5x+2=0$
d) $2x^2+7x+3=0$ e) $3x^2=10x-3$ f) $23x+10=5x^2$

10. a) $x^2-4x=0$ b) $3x^2+9x=0$ c) $2x^2-5x=0$
d) $4x^2-3x=0$ e) $x^2=x$ f) $\sqrt{8}x^2=\sqrt{6}x$

11. a) $x(x-4)-6(x-4)=0$ b) $3(2x+3)-x(2x+3)=0$
c) $2x(x-1)=4(x-1)$ d) $(5-x)(x+1)=(5-x)(2x+5)$
e) $2x(x-3)=3(3-x)$ f) $(2x+1)(2x-3)=(3-2x)(3x+2)$

12. a) $(x-1)^2+(x^2-1)=0$ b) $(x-3)^2-2(x^2-9)=0$
c) $(x+1)^2-2(x^2+1)=0$ d) $5(x+2)^2-(x^2+4)=0$
e) $(5-x)^2=(2x-10)(x+1)$ f) $x^2-16=(12-3x)(2-x)$

13. *Tiefe des Brunnenschachts der Wülzburg*

a) Stelle nach Seite 37 a) die gemischtquadratische Gleichung für die Fallzeit x Sekunden des Steins auf!

b) Berechne die Fallzeit in Sekunden auf 2 Dezimalstellen genau!

c) Berechne die Schachttiefe bis zum Wasserspiegel auf Meter genau!

d) Nach einer historischen Quelle ist der Brunnen 481 Pariser Fuß, nach einer anderen 524 bayerische Fuß tief. Für diese veralteten Längenmaße gilt: 1 Pariser Fuß = 0,325 Meter, 1 bayerischer Fuß = 0,292 Meter. Berechne die historisch überlieferten Schachttiefen und vergleiche mit dem Wert von c)!

Ergänzungen und Ausblicke

UND- und ODER-Verknüpfung von Aussagen

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist. Verknüpft man zwei Aussagen durch das Bindewort *und*, entsteht wieder eine Aussage, z. B.:
„Heute ist Mittwoch *und* heute schneit es."
Diese Aussage ist nur dann wahr, wenn sowohl die erste Teilaussage als auch die zweite wahr ist, andernfalls ist sie falsch. In der Mathematik schreibt man für *und* das Zeichen $\wedge$.
Aussagen kann man auch durch *oder* verknüpfen, z. B.:
„Goethe ist an einem Donnerstag oder an einem Freitag geboren."
„Der Aufzug hält in jedem Stockwerk, in dem Leute ein- *oder* aussteigen wollen."
Das ODER wird hier in zwei Bedeutungen verwendet: Im ersten Beispiel in der in der Umgangssprache am häufigsten benutzten Weise im Sinn von *„entweder oder"*. Die Gesamtaussage ist genau dann wahr, wenn eine Teilaussage wahr und die andere falsch ist. Im Gegensatz dazu wird man die zweite ODER-Aussage auch dann noch als wahr bezeichnen, wenn sowohl die erste als auch die zweite Teilaussage wahr ist. ODER wird hier im Sinn von *„oder auch"* verwendet. Die in der Mathematik mit $\vee$ bezeichnete ODER-Verknüpfung ist das „einschließliche oder", das „oder auch".

Satz:

Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ besitzt

keine Lösung, wenn $D < 0$ ist,
genau *eine* Lösung, wenn $D = 0$ ist,
zwei Lösungen, wenn $D > 0$ ist.

Für die Lösungen gilt: $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

C. Biquadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ heißt *biquadratisch*[1], weil sie als quadratische Gleichung in x^2 aufgefasst werden kann:

$$a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0$$

Ersetzen wir x^2 durch eine neue Variable, so können wir die biquadratische Gleichung auf eine quadratische zurückzuführen: $x^2 := u$

$$au^2 + bu + c = 0$$

Diese Einführung einer neuen Variablen heißt *Substitution*[2].

Lösungsschritte

Beispiel: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0; \quad x^2 := u$ — Substitutieren

$u^2 - 7u + 12 = 0$ — quadratische Gleichung lösen

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2}$$

$$u = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$u = 4 \vee u = 3$ — Substitution rückgängig machen

$$x^2 = 4 \vee x^2 = 3$$

$$x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

$$L = \{2; -2; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$$

AUFGABEN

1. Berechne die Lösungen mit der Formel!

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ b) $10x^2 + 11x + 3 = 0$ c) $3x^2 + 8x - 3 = 0$
d) $5x^2 - 8x - 21 = 0$ e) $-15x^2 - 19x + 56 = 0$ f) $20x^2 - 7x - 6 = 0$

2. a) $0{,}2x^2 + 1{,}6 = 1{,}14x$ b) $0{,}5x^2 + 0{,}15x = 0{,}27$ c) $0{,}7x^2 + 0{,}9x = 1$
d) $3v^2 + 4{,}2 = 8{,}8v$ e) $4x^2 = 8x + 1$ f) $24x + 19 = 18x^2$

[1] bis (lat), zweimal [2] substituere (lat.), ersetzen

3. Multipliziere zunächst jede Gleichung mit einer Zahl, sodass alle Koeffizienten ganzzahlig werden! Berechne dann die Lösungen!

a) $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$ b) $z^2 + \frac{7}{4}z - \frac{15}{8} = 0$ c) $u^2 - \frac{3}{20}u - \frac{1}{100} = 0$

d) $2v^2 = \frac{1}{3}v + \frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{80} = \frac{1}{3}t^2 + \frac{7}{120}t$ f) $\frac{8}{7}y^2 = \frac{7}{5}y + \frac{1}{7}y^2$

4. Bestimme die Anzahl der Lösungen mithilfe der Diskriminante!

a) $x^2 + 12x + 38 = 0$ b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ c) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

d) $5x^2 - 16x + 13 = 0$ e) $7x^2 - 2x - 11 = 0$ f) $12x^2 + 60x + 75 = 0$

5. a) Wie lautet die Diskriminante D für die Normalform $x^2 + px + q = 0$ der quadratischen Gleichung?

b) Begründe: Ist $q < 0$, so gibt es stets zwei Lösungen.

6. a) $x^2 - \sqrt{12}x + 3 = 0$ b) $x^2 + 10 = \sqrt{45}x$ c) $\sqrt{8}x - x^2 = 1$

d) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3} = 3x$ e) $\sqrt{24}x = 2x^2 + 3$ f) $14x + 2\sqrt{7} = \sqrt{7}x^2$

7. a) $2x(x+3) - x(x-1) + 6 = 0$ b) $(4-x)^2 + (2x-1)^2 = 10$

c) $(x-5)(2x-17) - (x-7)(3x+1) = 84$ d) $(2x-3)(3x-2) - (3x-1)^2 = 10$

8. *Bilder ohne und mit Rahmen*

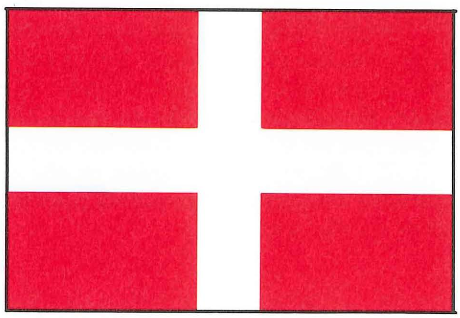
a) Ein rechteckiges Bild vom Flächeninhalt $875\,\text{cm}^2$ ist 10 cm länger als breit. Wie lang und wie breit ist das Bild?

b) Ein rechteckiges Bild ist mit Rahmen 80 cm lang und 60 cm breit. Peter schätzt, dass der übergroße Rahmen den gleichen Flächeninhalt wie das Bild hat. Wie breit müsste dann der Rahmen sein?

c) Ein rechteckiges Bild ist mit Rahmen 55 cm lang und 40 cm breit. Der Rahmen hat den Flächeninhalt $850\,\text{cm}^2$. Wie breit ist der Rahmen?

9. *Der Danebrog*

Die dänische Nationalflagge, der Danebrog, zeigt ein weißes Kreuz auf rotem Grund. Wie breit müssen die weißen Streifen auf einem rechteckigen Fahnentuch von 3 m Länge und 2 m Breite gewählt werden, wenn das Kreuz gerade ein Drittel der Rechtecksfläche bedecken soll?



10. Gib über der Grundmenge $\mathbb{R}$ die Definitionsmenge D an! Bestimme die Lösungsmenge!

a) $2x + \frac{1}{x} = 3$ b) $\frac{5-3x}{1+x} + \frac{3}{x} = 4$

c) $\frac{x}{5-2x} + \frac{1}{3-2x} = 1$ d) $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{22-7x}{2-x} = \frac{4x-2}{x^2-4}$

e) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} = 2 \cdot \frac{1-x}{x-2}$ f) $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{1-x} = \frac{2}{x^2-1}$

g) $\frac{3x}{x-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{6}{x^2-1}$ h) $\frac{5+x}{3-x} - \frac{2x}{x-2} = \frac{8-3x}{x}$

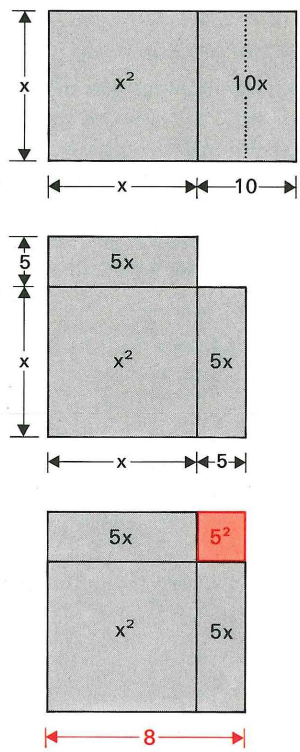
11. a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ b) $z^4 - 9z^2 + 20 = 0$
c) $16x^4 - 136x^2 + 225 = 0$ d) $6y^4 - 5y^2 + 1 = 0$
e) $x^4 + 2x^2 - 35 = 0$ f) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

12. Führe zuerst eine geeignete Substitution durch!
a) $(x^2 - 9)^2 + 5(x^2 - 9) = 0$ b) $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
c) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 5 = 7\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ d) $(2x^2 - 5x)^2 + 4x^2 = 10x + 3$

13. Führe die folgenden Wurzelgleichungen zuerst durch eine geeignete Substitution auf quadratische Gleichungen zurück!
a) $x - 8\sqrt{x} + 15 = 0$ b) $x - 6\sqrt{x} + 4 = 0$
c) $x + 2\sqrt{x} - 24 = 0$ d) $\sqrt{x} - 29 = \frac{30}{\sqrt{x}}$

Ergänzungen und Ausblicke

Das geometrische Lösungsverfahren des al-Chwarismi



Zur Zeit ihres berühmten Mathematikers *Muhammed ibn Musa al-Chwarismi* (783 bis 850 n. Chr.) benutzten die Araber noch keine negativen Zahlen. Negative Lösungen quadratischer Gleichungen gab es deshalb nicht.
Wenden wir uns einem Beispiel al-Chwarismis zu:

$$x^2 + 10x = 39$$

Geometrisch gedeutet ist es die Aufgabe, die Seitenlänge x eines Quadrats zu bestimmen, das zusammen mit einem Rechteck der Länge 10 und der Breite x den Flächeninhalt 39 besitzt. Al-Chwarismi halbierte das Rechteck: Die beiden neuen Rechtecke der Länge 5 und der Breite x setzte er unmittelbar an das Quadrat an. Nun ergänzte er die Figur durch ein kleines Quadrat mit dem Flächeninhalt 5^2 zu einem großen Quadrat. Dieses hat folglich den Flächeninhalt $39 + 25 = 64$. Also besitzt es die Seitenlänge 8. Die gesuchte Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats beträgt somit $x = 8 - 5 = 3$.

Es ist uns gelungen, das Polynom $x^2 + px + q$ in Faktoren zu zerlegen. $x - x_1$ und $x - x_2$ nennt man *Linearfaktoren.*
Setzt man in das Polynom $x^2 + px + q$ für x die Lösung x_1 oder die Lösung x_2 ein, erhält man Null. Ein Produkt nimmt nur dann den Wert Null an, wenn mindestens ein Faktor Null ist; für $x = x_1$ oder $x = x_2$. So wird verständlich, dass in der Faktorzerlegung die Terme $x - x_1$ und $x - x_2$ auftreten.
Liegt ein allgemeines quadratisches Polynom $ax^2 + bx + c$ vor, muss man zuerst a ausklammern und dann entsprechend vorgehen. Also:

Zerlegungssatz

Besitzt die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt: $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Jetzt können wir auch quadratische Polynome faktorisieren, wenn die zugehörige Gleichung Lösungen besitzt.

Beispiel: $$2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2 + x - 6) = 2(x - 2)(x + 3)$$ (Lösungen nach Vieta: $x_1 = 2;\ x_2 = -3$)

AUFGABEN

1. Gib jeweils die Normalform der quadratischen Gleichung an, die folgende Lösungen besitzt:

a) 3 und 7 b) 3 und -7 c) -3 und 7
d) -3 und -7 e) -3 und 0 f) 3 und 3
g) -3 und -3 h) 3 und -3 i) $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$
k) $2 + \sqrt{3}$ und $2 - \sqrt{3}$ l) $7 + 4\sqrt{3}$ und $7 - 4\sqrt{3}$ m) $-7 - 5\sqrt{2}$ und $-7 + 5\sqrt{2}$
n) $\sqrt{3} + 2$ und $\sqrt{3} - 2$ o) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ und $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ p) $1 - \sqrt{2}$ und $2 + \sqrt{2}$

2. Die *Vieta-Probe*
Überprüfe mithilfe des Satzes von Vieta, ob die angegebene Menge die Lösungsmenge der Gleichung ist! Berichtige, falls erforderlich, die Lösungsmenge!

a) $x^2 + 5x + 6 = 0;\ \{2; 3\}$ b) $x^2 - 3{,}5x - 7{,}5 = 0;\ \{-1{,}5; 5\}$
c) $x^2 - 0{,}5x - 7{,}5 = 0;\ \{2{,}5; -3\}$ d) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{18} = 0;\ \{-\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}\}$

3. Versuche, die Lösungen mithilfe des Satzes von Vieta zu finden!

a) $x^2 - 9x + 20 = 0$ b) $x^2 + 9x + 20 = 0$ c) $x^2 - x - 20 = 0$
d) $x^2 + x = 20$ e) $x^2 - 17x + 70 = 0$ f) $x^2 - 11x - 26 = 0$
g) $x^2 + 2x - 24 = 0$ h) $x^2 + 5x - 6 = 0$ i) $x^2 - 4x + 5 = 0$

4. Wie lauten die Formeln des Satzes von Vieta für die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$ der quadratischen Gleichung?

5. Versuche die Lösungen mithilfe des Satzes von Vieta zu finden!

a) $2x^2 + 32x + 96 = 0$ b) $3x^2 + 15x = 108$ c) $0{,}5x^2 - 1{,}5x = 9$
d) $5x^2 + 7x = 0$ e) $49x^2 - 21x + 2 = 0$ f) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

6. Bestimme die zweite Lösung und den fehlenden Koeffizienten!

a) $x^2 + 15x + q = 0$; $x_1 = -18$ b) $x^2 - 6x + q = 0$; $x_1 = 3 + \sqrt{5}$

c) $x^2 + px + 12 = 0$; $x_1 = -5 - \sqrt{13}$ d) $ax^2 + 11x - 35 = 0$; $x_1 = -\frac{7}{2}$

7. Zerlege folgende Polynome so weit wie möglich in Faktoren!

a) $x^2 - 13x + 42$ b) $x^2 - 15x - 76$ c) $x^2 + 21x + 108$

d) $x^2 + 0{,}2x - 0{,}24$ e) $x^2 - 8x + 9$ f) $x^2 + 9x + 9$

g) $5x^2 + 8x - 21$ h) $30x^2 - 11x - 30$ i) $2x^2 - 6x + 3$

8. Bestimme die Definitionsmenge D (Grundmenge $\mathbb{R}$). Kürze vollständig!

a) $\frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 25}$ b) $\frac{z^2 - 16}{z^2 + z - 20}$ c) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

d) $\frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 - 6x + 9}$ e) $\frac{6x^2 - 12x - 18}{3x^2 - 12x + 9}$ f) $\frac{4x^2 + 4x - 3}{4x^2 + 2x - 6}$

9. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge (Grundmenge $\mathbb{R}$)!

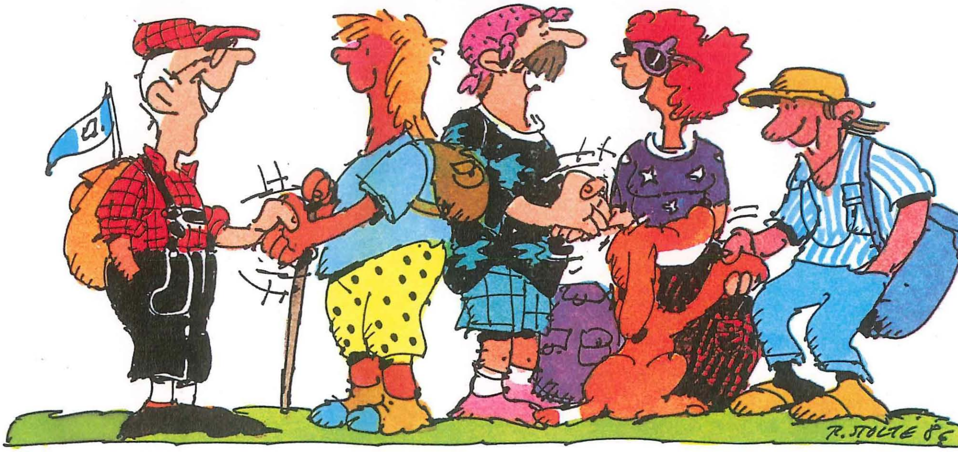
a) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = 2$ b) $\frac{5x}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{1 + x}$

c) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 2x - 3} = \frac{x + 5}{x - 3}$ d) $\frac{x}{x - 2} + \frac{x}{x + 3} + \frac{x - 12}{x^2 + x - 6} = 0$

Tüftelecke

Begründe den *Satz*:
Hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ganzzahlige Koeffizienten p, q und zwei Lösungen, und ist ferner eine Lösung eine ganze Zahl, so ist auch die andere eine ganze Zahl.

§10 Textaufgaben



Begrüßung

An einer Wanderung nehmen 15 Personen teil. Zu Beginn begrüßt jeder Teilnehmer jeden anderen mit „Guten Morgen" und durch Händeschütteln.

a) Wie oft sagt eine Person „Guten Morgen"? Wie oft wird der Gruß insgesamt ausgesprochen?

b) Wie oft werden insgesamt Hände geschüttelt?

Wir verallgemeinern: Die Anzahl der Teilnehmer sei x.

c) Wie oft sagt eine Person „Guten Morgen"? Wie oft wird der Gruß insgesamt ausgesprochen?

d) Wie oft werden insgesamt Hände geschüttelt?

A. Denksportaufgaben

Der besondere Reiz von Denksportaufgaben liegt häufig darin, dass man zu gewöhnlichen Situationen ungewöhnliche Fragen stellt.

Beispiel: Bei einer Feier stoßen alle Teilnehmer miteinander an. Man hört die Gläser 66-mal klingen. Wie viele Personen nehmen an der Feier teil?

Lösung: x ist die Anzahl der Teilnehmer.
Jede Person hebt $(x-1)$-mal ihr Glas, um mit einer anderen Person anzustoßen. Insgesamt werden also $x(x-1)$ Gläser gehoben. Da zwei angehobene Gläser beim Zusammenstoßen nur einen Klang erzeugen, erklingt es nur halb so häufig, also $\frac{x(x-1)}{2}$-mal.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \qquad | \cdot 2 \qquad G = \mathbb{N}$$

$$x^2 - x = 132$$

$$x^2 - x - 132 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 132}}{2} = \frac{1 \pm 23}{2}$$

$$x_1 = 12; \; (x_2 = -11)$$

Antwort: An der Feier nehmen 12 Personen teil.

Probe: Jede Person hebt 11-mal ihr Glas. Insgesamt werden also $12 \cdot 11$ Gläser gehoben. Diese erklingen $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$-mal.

B. Bestimmen von Zahlen

Die dezimale Schreibweise der Zahlen stützt sich darauf, dass jede Stelle einen bestimmten Wert hat. Zum Beispiel bedeutet 74 ausführlich geschrieben

$$74 = 7 \cdot 10 + 4 \cdot 1.$$

Sind in einer Aufgabe die Ziffern einer mehrstelligen Zahl gesucht, muss man von dieser Eigenschaft des Zehnersystems Gebrauch machen. Vertritt x die Zehnerziffer und y die Einerziffer einer zweistelligen Zahl, so erfasst der Term

$$x \cdot 10 + y \cdot 1$$

die Zahl.

Die Quersumme dieser Zahl, d. h. die Summer ihrer Ziffern, ist $x + y$.

Nun zu einer entsprechenden Aufgabe!

Beispiel: Welche zweistellige Zahl, deren Einerziffer um 7 kleiner als die Zehnerziffer ist, ist gleich dem Quadrat ihrer Quersumme?

Lösung: x ist die Zehnerziffer.

	Term
Zehnerziffer	x
Einerziffer	$x - 7$
Zahl	$x \cdot 10 + (x - 7) = 11x - 7$
Quersumme	$x + (x - 7) = 2x - 7$

$$11x - 7 = (2x - 7)^2 \qquad G = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$$

$$11x - 7 = 4x^2 - 28x + 49$$

$$4x^2 - 39x + 56 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{39 \pm \sqrt{39^2 - 16 \cdot 56}}{8} = \frac{39 \pm 25}{8}$$

$$x_1 = 8; \quad (x_2 = \tfrac{7}{4})$$

Antwort: Die Zahl ist 81.

Probe: $(8 + 1)^2 = 81$

AUFGABEN

1. *Begrüßung*

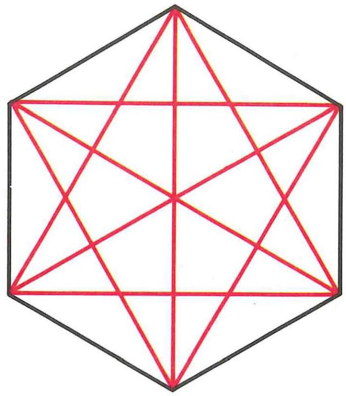
a) Zu Beginn einer Wanderung begrüßt jeder Teilnehmer jeden anderen mit „Guten Morgen". Dieser Gruß wird insgesamt 272-mal ausgesprochen. Wie viele Personen nehmen an der Wanderung teil?

b) Zu Beginn eines Tischtennis-Turniers schütteln sich die Spieler gegenseitig die Hände. Es werden insgesamt 120-mal Hände geschüttelt. Wie viele Spieler nehmen am Turnier teil?

2. *Ligastärke*

a) Jede Mannschaft einer Fußballiga bestreitet gegen jede andere Mannschaft ein Hin- und ein Rückspiel. Es finden insgesamt 306 Spiele statt. Aus wie vielen Mannschaften besteht die Liga?

b) Jede Mannschaft einer Fußballiga bestreitet in der Vorrunde gegen jede andere Mannschaft ein Spiel. Es finden in der Vorrunde insgesamt 190 Spiele statt. Aus wie vielen Mannschaften besteht die Liga?



3. *Diagonalen*

a) Ein konvexes[1] Vieleck hat 104 Diagonalen. Wie viele Ecken besitzt es?

b) Ein konvexes Vieleck hat 12 Diagonalen mehr als Seiten. Wie viele Ecken besitzt es?

4. *Primzahlzwillinge*

Zwei Primzahlen, von denen eine um 2 größer ist als die andere, heißen Primzahlzwillinge. Gibt es mit folgender Eigenschaft jeweils Primzahlzwillinge?

a) Ihr Produkt ist 399.

b) Ihr Produkt ist um 119 größer als ihre Summe.

c) Das Quadrat ihrer Summe ist um 198 größer als die Summe ihrer Quadrate.

5. *Kehrwerte*

a) Die Summe der Kehrwerte zweier aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist $\frac{9}{20}$. Wie heißen die Zahlen?

b) Die Summe zweier Zahlen ist 3, die Differenz ihrer Kehrwerte $\frac{1}{2}$. Wie lauten die Zahlen?

c) Welche Zahl ist um 1 größer als ihr Kehrwert?

6. *Quersumme*

a) Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 2 kleiner als die Zehnerziffer. Multipliziert man die Zahl mit ihrer Quersumme, so erhält man 900. Wie lautet die Zahl?

b) Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 4 kleiner als die Zehnerziffer. Die Zahl ist um 15 größer als das Quadrat ihrer Quersumme. Wie heißt die Zahl?

c) Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 2 größer als die Zehnerziffer. Dividiert man die Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man die Einerziffer. Wie lautet die Zahl?

---

[1] jeder Innenwinkel kleiner als 180°; convexus (lat.), gewölbt, gerundet

7. *Spiegelzahl*
Kehrt man die Reihenfolge der Ziffern einer Zahl um, so entsteht ihre Spiegelzahl.
a) Eine zweistellige Zahl besitzt die Quersumme 9. Multipliziert man die Zahl mit ihrer Spiegelzahl, so erhält man 1944. Bestimme alle Zahlen mit diesen Eigenschaften!
b) Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 1 kleiner als die Zehnerziffer. Subtrahiert man von der Zahl ihre Spiegelzahl, so erhält man das Quadrat der Quersumme der Zahl. Wie heißt die Zahl?
c) Die Zehnerziffer einer dreistelligen Zahl ist um 3 größer als die Einerziffer. Die Zahl ist gleich ihrer Spiegelzahl. Dividiert man die Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man das 14fache der Hunderterziffer. Wie lautet die Zahl?

8. *Satz von Pythagoras*
a) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die größere Kathete um 1 cm kürzer als die Hypotenuse und um 17 cm länger als die kleinere Kathete. Wie lang sind die Seiten?
b) Ein rechtwinkliges Dreieck besitzt den Umfang 30 cm. Die Hypotenuse ist 8 cm länger als eine der beiden Katheten. Wie lang sind die Seiten?
c) Ein Rechteck hat den Umfang 46 cm. Seine Diagonale ist 17 cm lang. Wie lang sind die Seiten?
d) Der Umfang eines Rechtecks beträgt 82 cm. Die Diagonale ist 9 cm länger als eine der beiden Seiten. Wie lang sind die Seiten?

9. *Bewegungsaufgaben*
a) Ein Lastkraftwagen benötigte für eine 150 km lange Strecke 3 Stunden. Dabei konnte er auf den ersten 90 km seine normale Durchschnittsgeschwindigkeit einhalten. Auf der Reststrecke musste er wegen schlechter Beschaffenheit der Straße diese Geschwindigkeit um 20 km/h herabsetzen. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erzielte der Lkw auf der ersten Teilstrecke?
b) Als es noch keine Schleusen auf der Donau gab, benötigte ein Donaudampfschiff für die 91 km lange Fahrt von Passau nach Linz und die anschließende Rückfahrt insgesamt 11,5 Stunden. Die Driftgeschwindigkeit[1] der Donau betrug 2,5 km/h. Wie groß war die Eigengeschwindigkeit des Schiffes? Wie lang benötigte es von Passau nach Linz und wie lang von Linz nach Passau?
c) Für eine 18 km lange Strecke benötigt ein Radfahrer $2\frac{2}{3}$ Stunden weniger als ein Fußgänger, da die Geschwindigkeit des Radfahrers um 9 km/h größer ist als die des Fußgängers. Wie groß sind die Geschwindigkeiten?
d) Ein Schiff benötigt für eine 5250 m lange Strecke flussaufwärts 6 Minuten länger als flussabwärts. Die Driftgeschwindigkeit[1] beträgt 3 km/h. Wie lang braucht das Schiff für die Fahrt flussaufwärts, wie lang für die Fahrt flussabwärts? Wie lang würde das Schiff auf einem See für eine $2 \cdot 5250$ m lange Strecke benötigen?

10. *Oldtimer-Dampflok*
Bei einer Dampflok der Baureihe 38 ist der Umfang des Treibrades um 236 cm größer als der des Laufrades. Deshalb muss sich auf einer Strecke von 3,665 km das kleinere Rad gerade 500-mal mehr drehen als das größere. Berechne den Umfang der Räder!

11. *Röhrenaufgaben*
Ein Schwimmbecken kann durch zwei Zuflussröhren gefüllt werden.

---
[1] driften (Seemannssprache), treiben

a) Die eine würde dazu 6 Stunden weniger als die andere benötigen. Zusammen brauchen sie 4 Stunden. In wie vielen Stunden würde jede Röhre allein das Becken füllen?

b) Die erste Röhre würde das Becken allein in 5 Stunden füllen. Die zweite würde 4,5 Stunden mehr als beide zusammen benötigen. Wie viele Stunden würde die zweite Röhre allein benötigen?

12. *Leistung*
Ein großer landwirtschaftlicher Betrieb besitzt zwei Traktoren unterschiedlicher Leistung. Der leistungsstärkere Traktor benötigt zum Pflügen eines bestimmten Feldes 5 Stunden weniger als der leistungsschwächere. Beide brauchen zusammen 6 Stunden. Wie viele Stunden würde jeder Traktor zum Pflügen des Feldes benötigen?

Tüftelecke

1. Aus der *Vollständigen Anleitung zur Algebra* von *Leonhard Euler* (1770)
Zwei Bäuerinnen tragen zusammen 100 Eier auf den Markt, die eine mehr als die andere, und lösen doch beide gleich viel Geld. Nun sagt die eine zur anderen: „Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer gelöst." Darauf antwortet die andere: „Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreuzer gelöst." Wie viele Eier hatte jede?

2. Eine Aufgabe des Inders *Bhaskara* (um 1150 n. Chr.)
Eine Schar Affen vergnügt sich. Der achte Teil des unruhigen Haufens zum Quadrat erhoben turnt in den Bäumen herum, die restlichen 12 vollführen alle zugleich ein Geschrei auf dem Gipfel eines Hügels. Wie viele zählt die aufgeregte Schar?

$$= \frac{-3a+1 \pm \sqrt{9a^2-6a+1-8a^2+8a}}{2} =$$

$$= \frac{-3a+1 \pm \sqrt{a^2+2a+1}}{2} =$$

$$= \frac{-3a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2}}{2} =$$

$$= \frac{-3a+1 \pm |a+1|}{2}$$

Für beliebige reelle Zahlen b unterscheiden sich $\pm|b|$ und $\pm b$ höchstens in der Reihenfolge der Vorzeichen. Also:

$$x_{1;2} = \frac{-3a+1 \pm (a+1)}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2a+2}{2} = -a+1; \quad x_2 = \frac{-4a}{2} = -2a$$

B. Fallunterscheidungen

Die Diskriminante einer quadratischen Gleichung entscheidet, wie viele Lösungen diese besitzt.

Beispiel: $x^2-(2t+2)x+(t^2+t)=0$

$$D = b^2-4ac = (2t+2)^2-4(t^2+t) =$$
$$= 4t^2+8t+4-4t^2-4t = 4t+4$$

1. Fall: Es gibt keine Lösung,
wenn $D = 4t+4 < 0$, d.h. $4t < -4$, d.h. $t < -1$ ist.

2. Fall: Es gibt genau eine Lösung,
wenn $D = 0$, d.h. $t = -1$ ist.
Für $t = -1$ lautet die ursprüngliche Gleichung $x^2 = 0$.
Also: $x_1 = x_2 = 0$

3. Fall: Es gibt zwei Lösungen,
wenn $D > 0$, d.h. $t > -1$ ist.

$$x_{1;2} = \frac{(2t+2) \pm \sqrt{4t+4}}{2} = \frac{2(t+1 \pm \sqrt{t+1})}{2}$$

$$x_1 = t+1+\sqrt{t+1}; \quad x_2 = t+1-\sqrt{t+1}$$

AUFGABEN

1. Löse die Gleichung nach der in eckiger Klammer angegebenen Variablen auf!

a) $A = 6a^2$ [a] b) $V = \frac{1}{3}a^2h$ [a] c) $E = \frac{1}{2}mv^2$ [v] d) $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}$ [T]

e) $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ [h] f) $(3r)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ [a]

g) $\left(\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ [r] h) $\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \left(\frac{1}{3}h\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ [a]

Nr. 2 bis 8: Die Lösungsvariable ist x. Wenn nichts anderes angegeben ist, vertreten die Parameter beliebige reelle Zahlen: $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, ..., $t \in \mathbb{R}$.

2. a) $x(x-b) + a(x-b) = 0$ b) $3x(2x-b) = a(b-2x)$
c) $x^2 + ab = ax + bx$ d) $x^2 + nx = m(x+n)$
e) $x^2 + 6kx + 9k^2 = 0$ f) $x^2 + 2a^2 = 3ax$

3. a) $x^2 + a^2 = 2ax + 1$ b) $x^2 + a^2 = 2ax + b^2$
c) $x^2 - 3ax - x + 2a^2 + a = 0$ d) $x^2 + 3(a^2 + a) = 4ax + x$
e) $x^2 - a^2 + 2b(x+a) = 0$ f) $x(x-2) - c(2x-c-2) = 0$

4. a) $ax^2 + 1 = ax + x$ b) $ax(ax+7) - 5(ax+3) = 0$
c) $(2x-c)^2 - d(2x-c) = 2d^2$ d) $(a-x)(b-x) = 2(a-b)^2$
e) $(tx-1)(tx+1) + 10 = t^2(2x-1)$ f) $ax(ax+6) = (2a+3)(2a-3)$

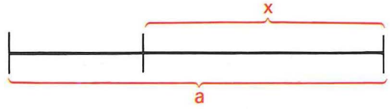
5. Bestimme jeweils die Definitionsmenge und die Lösungsmenge in Abhängigkeit vom Parameter (Grundmenge $\mathbb{R}$)!
a) $\frac{x}{a} - \frac{2a}{x} = 1;\quad (a \neq 0)$ b) $\frac{x+2}{b} - \frac{2}{x-b} = 2;\quad (b \neq 0)$
c) $\frac{7c}{x+c} - \frac{c}{x-c} = \frac{4}{5};\quad (c \neq 0)$ d) $\frac{x}{x+a} + \frac{6a^2}{x^2-a^2} = \frac{3a}{x-a};\quad (a \neq 0)$

6. Bestimme die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter t!
a) $x^2 + 6x + t = 0$ b) $x^2 - 3tx - 18 = 0$
c) $x^2 + (2t-1)x + t^2 = 0$ d) $tx^2 + 2x + 2 = 0$
e) $tx^2 + (4+2t)x + t = 0$ f) $tx^2 - 2tx + 3x + t = 0$

7. Bestimme die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter! Wie lauten in den Fällen mit lösbaren Gleichungen die Lösungsterme? (Vieta-Probe!)
a) $x^2 - 4x + 4 - a = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 + b = 0$
c) $x^2 - 3\sqrt{c}\,x + 2c = 0;\quad (c \in \mathbb{R}_0^+)$ d) $x^2 + 2\sqrt{a}\,x + a - b = 0;\quad (a \in \mathbb{R}_0^+)$
e) $x^2 - 2\sqrt{t}\,x + 3t = 0;\quad (t \in \mathbb{R}_0^+)$ f) $x^2 - 2\sqrt{k}\,x + 2k = 4;\quad (k \in \mathbb{R}_0^+)$

8. Für welche Parameterwerte t besitzt die Gleichung genau eine Lösung? Wie lautet jeweils diese Lösung?
a) $x^2 - tx + 9 = 0$ b) $x^2 - 3x - 3tx + 2t = 0$
c) $tx^2 + 10x + t = 0$ d) $tx^2 - tx + 2x + t = 0$

9. *Der „Goldene Schnitt"*
Bereits in der Antike haben sich die Griechen damit befasst, welche Streckenteilung in der Architektur und Malerei vom menschlichen Auge als besonders „schön" empfunden wird:



Eine Strecke der Länge a heißt nach dem Goldenen Schnitt geteilt, wenn das Verhältnis der Längen der größeren Teilstrecke zur Gesamtstrecke gleich dem Verhältnis der Längen der kleineren zur größeren Teilstrecke ist.
a) Drücke die Länge x der größeren Teilstrecke durch a aus!
b) Das Längenverhältnis x : a des Goldenen Schnitts ist irrational. Gib dafür als guten rationalen Näherungswert einen Bruch mit dem Nenner 8 an!
c) Die Türme des Kölner Doms sind 160 m hoch. Sie werden durch die Stelle, wo der Helm beginnt, im Goldenen Schnitt geteilt. In welcher Höhe befindet sich diese Stelle?